УДК 517.5

ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ ДЛЯ ЗАДАЧ ПРО ВИТІКАННЯ РІДИНИ З РЕЗЕРВУАРУ ПРИ МАЛОМУ ОТВОРІ

Студ. А.С. Бурим, гр. БЕЕ-16
Студ. М.С. Присяжнюк, гр. БМЕ-16
Науковий керівник В.В.Шкапа
Київський національний університет технологій та дизайну

Мета і завдання. Мета: Обґрунтувати застосування визначеного інтегралу для вирішення фізичних і математичних задач; розглянути можливості практичного застосування інтегралів у фізиці та математиці.

Завдання: Пояснити можливості використання визначеного інтегралу і його основних властивостей у вирішенні задач про витікання рідини з резервуару при малому отворі; Виявити специфічні деталі такого методу вирішення задач.

Об'єкт дослідження. Фізична задача про зміну об'єму та рівня води у воронці конічної форми. Процес витікання рідини з даної ємкості. Фізичний зміст інтегралів.

Методи та засоби дослідження. Фізична задача з ілюстрацією. Закони фізики. Основні твердження, що описують витікання рідин, газів. Закон Торрічеллі. Прямий конус, властивості конуса. Формули для визначення об'єму конуса. Диференціальне числення. Властивості та методи інтегрування. Визначений інтеграл, його властивості й функції.

Наукова новизна та практичне значення отриманих результатів. На основі цього дослідження стає можливим:
- розрахунок швидкості та часу витікання рідин з резервуарів різної форми і призначення на виробництві;
- (з введенням додаткових умов і дій) обчислення швидкості протікання води, об'ємів проточної води та фактичне навантаження і потужність ГЕС (ГРЕС) в Україні.

Результати дослідження.

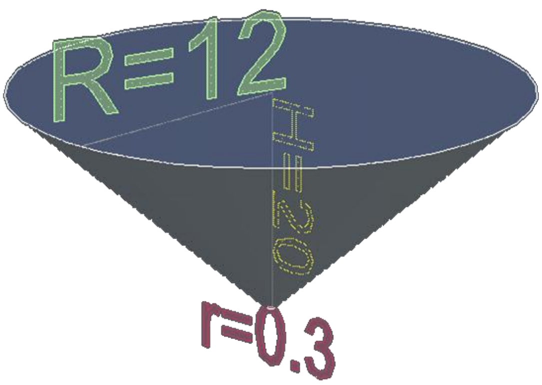

Рисунок 1

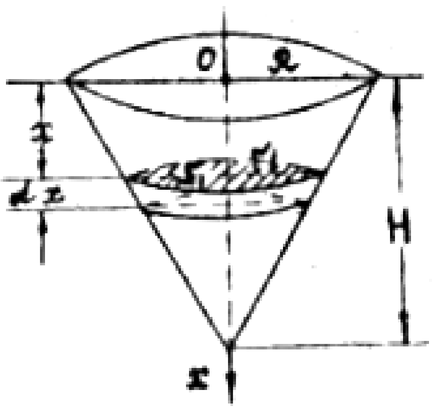

Рисунок 2

Проведемо вісь OX через центр воронки, початок відліку позначимо на основі конуса - на верхньому отворі, вісь направлена донизу. На осі відстань від 0 до поверхні води у час t позначимо через змінну x.

Розглянемо зв'язок між об'ємом води та часом, за який вона витікає. Нехай ці зміни відбуватимуться за законом h=h(t). Тоді надамо t приріст dt. Звідси слідує, що рівень води знизиться на величину dx так, що об'єм у ній зменшиться на величину конічного шару. Шар води (dx) настільки малий, що можна наближено вважати його циліндром з висотою dx і радіусом

$$r_1=\frac{R}{H}\left(H\text{-}x\right),$$

тобто на величину

$$dv=S_1dx=\pi r_1^2dx=\frac{\pi R^2}{H^2}(H\text{-}x)^2dx.$$

Цей об'єм рівний тому, який витікає з нижнього отвору за час dt. Враховуючи висоту та тиск рідини, скористаємося законом Торрічеллі (при витіканні ідеальної нестисливої рідини з отвору в широкій посудині рідина набуває швидкості, яку отримало б тіло, що вільно падає з висоти h).

$$V=\sqrt{2gh}$$

Згідно з ним загальна формула набуває такого вигляду:

$$\frac{\pi R^2}{H^2}(H\text{-}x)^2dx=\pi r^2\sqrt{2g(H\text{-}x)}dt;$$

$$dt=\frac{R^2\sqrt{(H\text{-}x)^3}}{r^2H^2\sqrt{2g}}dx$$

Застосуємо визначений інтеграл. Інтегруючи ліву частину в межах від нуля до шуканого T, а праву від нуля до якогось x=h, отримаємо:

$$T=\frac{R^2}{r^2H^2\sqrt{2g}}\int_0^N\sqrt{(H\text{-}x)^3}\,dx=\frac{2R^2}{5r^2H^2\sqrt{2g}}(H^2\sqrt{H}\text{-}(H\text{-}h)^2\sqrt{H\text{-}h})$$

Далі розглянемо два конкретні випадки, задані умовою, де використаємо виведену формулу:

а) Підставивши у формулу необхідні величини, знайдемо час, протягом якого рівень води у воронці знизиться на 5см:

$$T_1=\frac{2\times144\times(400\sqrt{20}\text{-}225\sqrt{15})}{5\times0{,}09\times400\sqrt{2\times980}}\approx33{,}2\text{ c}$$

б) Підставивши у формулу необхідні величини, знайдемо час, за який воронка стане порожньою (при додатковій умові h=H):

$$T_2=\frac{2R^2\sqrt{H}}{5r^2\sqrt{2g}}=\frac{2\times144\times\sqrt{20}}{5\times0{,}09\times\sqrt{2\times980}}\approx64{,}6\text{ c}$$

Висновки. Отже, окрім законів фізики, для вирішення задачі довелося використати безпосереднє інтегрування. Як бачимо, інтеграл чудово пояснює задачу та істотно полегшує її розв'язок. Сам же визначений інтеграл можна широко застосовувати як у фізиці й математиці, так і в економіці, біології та інших науках.

Ключові слова. Закон Торрічеллі, визначений інтеграл, безпосереднє інтегрування.