УДК 541.182:534.8

РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ПРУЖНІХ ХВИЛЬ В МОДЕЛЬНИХ КАПІЛЯРНО-ПОРИСТИХ ТІЛАХ

Б.М. СТАДНІК

Київський національний університет технологій та дизайну

Розглянуто розповсюдження ультразвукових хвиль в капілярно-пористих тілах зернистої структури. Встановлено зв'язок між швидкістю та коефіцієнтом поглинання ультразвуку з розмірами часток капілярно-пористого тіла, з величиною зовнішнього тиску тощо. Показано, що тіла з зернистої структурою є механічним фільтром нижніх частот. Теоретично доведено й експериментально підтверджено, що коефіцієнт опору пропорційний квадрату радіуса частинок капілярно-пористого тіла.

Механічні властивості капілярно-пористих тіл безпосередньо зв'язані з їх будовою – дисперсною структурою, яка характеризується як будовою так і розмірами окремого зерна пористого тіла, картиною розподілу їх за розмірами, умовами з'єднання, пористістю тощо. З цими властивостями капілярно-пористих тіл тісно пов'язані їх акустичні параметри – швидкість розповсюдження та коефіцієнт поглинання ультразвуку, що робить акустичні методи ефективним засобом дослідження капілярно-пористих тіл без зміни їх структури. Тому теоретичне та експериментальне дослідження модельних капілярно-пористих тіл ультразвуковим методом та встановлення зв'язку між акустичними параметрами тіла та його фізико-механічними властивостями являє собою актуальну як теоретичну так і практичну задачу.

Об'єкти та методи дослідження

Механічні властивості капілярно-пористих тіл безпосередньо зв'язані з їх структурою, яка характеризується як будовою окремих елементів тіл, так і розподілом їх за розмірами, особливостями їх з'єднання, пористістю тощо. Встановлення механізму утворення, деформації і руйнування дисперсних структур різного типу в загальному випадку навряд чи можливо, бо їх фізико-механічні властивості змінюються в дуже широких межах. Через це ефективно вивчати так звані модельні тіла, що по своїм основним властивостям є дуже близькими до реальних капілярно-пористих тіл. Найпростішою моделлю капілярно-пористого тіла є запропонована у праці [1] «фіктивна» структура – структура, окремі частинки якої можуть розглядатися як сфери рівного радіуса і викладені певним чином. Вивчення подібної структури було проведено як теоретично, так і експериментально на зразках кварцового піску, частинки якого мають округлу форму та пружно взаємодіють між собою.

Постановка завдання

Теоретично та експериментально встановити зв'язок між швидкістю розповсюдження та коефіцієнтом поглинання ультразвукових хвиль з фізико-механічними властивостями модельного капілярно-пористого тіла зернистої структури.

Результати та їх обговорення

Нехай упаковка частинок середовища, що складається з пружних сфер радіуса r відповідає кубічній і саме середовище знаходиться під тиском P. Розглянемо поведінку ланцюжка частинок середовища, розміщених вздовж напрямку дії зовнішньої сили F. Відповідно до теорії Герца для так званої контактної задачі теорії пружності [2] залежність між величиною зближення центрів двох сусідніх пружних сфер і силою, що прикладена вздовж їх ланцюжка має такий вигляд

$$F = k \cdot \Delta y^{\frac{3}{2}} \tag{1}$$

де $k = \frac{E}{3(1-\sigma^2)} \cdot \sqrt{r}$, E ,$\sigma -$ модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу сфери.

Із формули (1) можна отримати вираз для коефіцієнта пружності λ точки контакту двох пружних сфер – частинок капілярно-пористого середовища, що знаходиться під тиском P :

$$\lambda = \frac{3}{2} r \cdot \sqrt[3]{\frac{4E^2 P}{9(1-\sigma^2)^2}} \tag{2}$$

Розглянемо поздовжні коливання одномірного ланцюжка частинок. Частинці, що знаходиться на початку координат присвоїмо номер 1, іншим частинкам в п напрямку осі ox номера 2, 3, … k , … . скориставшись рівняннями Лагранжа [3] можна отримати диференційне рівняння коливань $k -$ тої частинки, тобто:

$$m\frac{d^2 y_k}{dt^2} + 2\beta \frac{dy_k}{dt} + \lambda(-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1}) = 0 \tag{3}$$

де $\beta -$ коефіцієнт опору, $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ маса частинки, $\rho -$ густина матеріалу частинки.

У випадку досить невеликих розмірів частинок середовища або при невеликій частоті пружної хвилі (тобто, коли довжина хвилі набагато більше розмірів частинок середовища), кінцеву різницю в останньому рівнянні можна замінити похідною другого порядку по координаті x , а саме:

$$m\frac{\partial^2 y_k}{\partial t^2} + 2\beta \frac{dy_k}{dt} - 4\lambda r^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{4}$$

Рівняння (4) є аналогічним рівнянню, що описує розповсюдження хвиль в електричній лінії, і має рішення у вигляді бігучої синусоїдальної хвилі

$$y = y_0 \cdot \exp(-\delta x) \cdot \exp i(\omega t + \alpha x) \tag{5}$$

де $\delta -$ характеризує затухання пружних коливань, а α є фазовою постійною, що визначає швидкість розповсюдження пружних хвиль частотою ω :

$$\alpha = \frac{\omega}{v_0}\left|\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+\frac{\beta^2}{m^2\omega^2}}}{2}}\right| \tag{5а}$$

$$\delta = \frac{\beta}{mv_0}\left|\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{\beta^2}{m^2\omega^2}}}}\right| \tag{5б}$$

За величиною фазової сталої можна розрахувати величину швидкості ультразвуку за формулою:

$$v = v_0\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{\beta^2}{m^2\omega^2}}}} \tag{5в}$$

За формулами (5б) та (5в) визначаємо v_0 – швидкість звуку при незначному затуханні (де ρ – густина матеріалу частинок середовища):

$$v_0 = 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi\rho}\sqrt[3]{\frac{4E^2}{9(1-\sigma^2)^2}} \cdot P}$$

Виявилось, що швидкість пружних хвиль в зернистому середовищі пропорційна кореню шостого ступеня від величини зовнішнього тиску, що співпадає з експериментальними даними [4]. Другим важливим висновком є відсутність залежності від розмірів частинок середовища швидкості розповсюдження ультразвукових хвиль в зернистому середовищі при незначному затуханні.

Розглянемо процес розповсюдження ультразвукових хвиль високої частоти в модельних капілярно-пористих тілах зернистої структури. В цьому випадку довжина ультразвукової хвилі є близькою за величиною до розмірів частинок капілярно-пористого тіла. Знайдемо рішення рівняння (3) при наступних граничних умовах: для напів-обмеженого ланцюжка частинок коливання частинки з номером 0 будемо вважати рівними нулю, на частинку з номером 1, що знаходиться на початку координат, діє вимушуючи синусоїдальна сила, ланцюжок із n частинок вибираємо настільки довгим, щоб амплітуда коливань $n+1$ частинки внаслідок поглинання була рівна нулю. Тоді граничні умови запишемо у вигляді

$$y_0 = y_{n+1} = 0,$$

а початкові умови –

$$y_k(0) = \frac{dy_k}{dt} = 0$$

Поведінка системи n пружних частинок модельного капілярно-пористого тіла описується системою таких диференційних рівнянь:

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + 2\chi\frac{dy_1}{dt} + \gamma[2y_1 - y_2] = \frac{A}{m}\sin\omega t$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} + 2\chi\frac{dy_2}{dt} + \gamma[-y_1 + 2y_2 - y_3] = 0$$

– –

$$\frac{d^2y_k}{dt^2} + 2\chi\frac{dy_k}{dt} + \gamma[-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1}] = 0 \tag{6}$$

– –

$$\frac{d^2y_n}{dt^2} + 2\chi\frac{dy_2}{dt} + \gamma[-y_{n-1} + 2y_n - y_{n+1}] = 0$$

де позначено $\chi = \frac{\beta}{m}$, $\gamma = \frac{\lambda}{m}$

Система диференційних рівнянь (6) внаслідок інтегрального перетворення Лапласа перетворюється в систему зображень функцій $y_k(t)$. Рішення її можна отримати чисто алгебраїчним методом, якщо виразити визначники системи рівнянь через поліноми Гегенбауера. З іншого боку, цю систему можна розглядати як систему різницевих рівнянь цілочисельного аргументу k, рішення якої можна знайти за допомогою інтегрального перетворення Лапласа. Подібна система рівнянь розглядалась А.І. Лур'є у відомій задачі Н. Е. Жуковського з дослідження натягу в зчепленні потягу на початку його руху. Загальне рішення системи рівнянь (6) має вигляд:

$$y_k = \frac{2A}{mn} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin\frac{\pi jk}{n} \cdot \sin\frac{\pi j}{n}}{\sqrt{\left(k_j^2 - \omega^2\right)^2 + 4\chi^2\omega^2}} \left[\sin(\omega t + \varphi) + \frac{\omega}{\sqrt{k_j^2 - \omega^2}} \cdot e^{-\chi t} \cdot \sin\left(\sqrt{k_j^2 - \omega^2}\, t + \phi\right) \right] \quad (7)$$

де $\varphi = arctg\left[-\frac{2\chi\omega}{k_j^2 - \omega^2} \right]$, $\phi = arctg\left[\frac{2\chi\sqrt{k_j^2 - \chi^2}}{2\chi^2 + \omega^2 - k_j^2} \right]$, $k_j^2 = 4\gamma \sin^2 \frac{\pi j}{2n}$.

Видно, що коливання $k-$той частинки середовища є сума чисто вимушених коливань з частотою ω та власних коливань з частотою $\sqrt{k_j^2 - \chi^2}$. При достатньо великому затуханні власними коливаннями з часом можна знехтувати і коливання ланцюжка сферичних пружних частинок будуть чисто вимушеними:

$$y_k = \frac{2A}{mn} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin\frac{\pi jk}{n} \cdot \sin\frac{\pi j}{n}}{\sqrt{\left(k_j^2 - \omega^2\right)^2 + 4\chi^2\omega^2}} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (8)$$

Якщо коефіцієнт затухання χ є невеликим по величині, другим доданком підкорінного виразу в формулі (8) можна знехтувати. В цьому випадку отримане рішення точно відповідає рішенню задачі по визначенню зміщення від положення рівноваги будь-якої ділянки струни під дією синусоїдальної вимушуючої сили, що прикладена до її кінця (5). Відомо, якщо для коливань з частотою ω діє умова $\frac{\omega^2}{2\gamma}$ >2, то вони не пропускаються системою і ця система є механічним фільтром нижніх частот.

Визначимо граничну частоту ω_0 модельної зернистої капілярно-пористої речовини. Відповідно записаної вище умови $\omega_0 = 2\sqrt{\gamma}$. Для зернистої речовини, як було показано раніше $\gamma = \frac{\lambda}{m}$, тому:

$$\omega_0 = \frac{3}{r} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi\rho} \sqrt[3]{\frac{4E^2}{9\left(1-\sigma^2\right)^2} \cdot P}}$$

Таким чином, гранична частота для капілярно-пористого тіла з зернистою структурою (наприклад, для кварцового піску) у випадку не дуже великого затухання зворотно пропорційна розміру частинок середовища і прямо пропорційна кореню шостої степені зовнішнього тиску. Розрахунки показують, якщо зернисте середовище знаходиться лише під дією власної ваги, гранична частота може бути мати невелике значення (порядку десятків і сотень кілогерц, в залежності від розмірів частинок зернистого середовища). Тому в цих умовах потрібно чекати аномально великого поглинання ультразвукових хвиль відносно низьких частот. Якщо ж внутрішнє тертя зернистого середовища має достатньо велике значення, то властивості його, як фільтра низьких частот будуть проявляться не так різко і навіть взагалі зникнути, як це було показано для коливань ланцюгових систем (6).

Результати експериментального дослідження імпульсним методом залежності швидкості розповсюдження ультразвуку частотою 70 кГц в кварцовому, піску що знаходився під дією лише власної ваги, приведені на рис.1. Точність визначення швидкості ультразвуку складала 3,5%, коефіцієнта поглинання – 8%. Виявилось, що швидкість розповсюдження ультразвукових хвиль лінійно залежить від розмірів частинок кварцового піску. Експериментально отримана залежність швидкості ультразвуку від розмірів частинок капілярно-пористого тіла дозволяє зробити певні виводи про характер залежності коефіцієнта опору β від розмірів частинок тіла. Дійсно, із формули (5б) витікає, що швидкість ультразвуку повинна не залежити від розмірів частинок середовища лише в тому випадку, коли затухання ультразвуку в середовищі дуже невелике. Якщо це не так, то швидкість розповсюдження ультразвуку може збільшуватися або зменшуватися із збільшенням розмірів частинок середовища в залежності від того, як змінюється коефіцієнт опору β із зміною розмірів частинок пористого тіла. Припустивши, що залежність між коефіцієнтом опору β і радіусом частинок визначається співвідношенням $\beta = r^n$, де k – коефіцієнт пропорційності, і, прийнявши до уваги, що маса частинок пропорційна кубу радіуса, можна впевнитись, що коли показник n >3 швидкість ультразвуку повинна зменшуватись зі збільшенням розмірів частинок середовища. При n =3 швидкість ультразвуку буде незмінною, а при n < 3 вона буде збільшуватися зі збільшенням розмірів частинок. Порівнюючи результати аналізу формули (5в) з експериментальною залежністю швидкості ультразвуку від розмірів частинок кварцового піску, можна прийти до висновку, що показник степені n може бути рівним лише 2, а коефіцієнт опору β може бути пропорційним по меншій мірі квадрату радіусу частинок піску. Якщо це так, то із формули (5б) витікає, що коефіцієнт затухання ультразвуку в квацевому піску, що є типовим представником капілярно-пористих тіл з зернистою структурою, повинен бути зворотно пропорційним радіусу його зерен, що отримало і експериментальне

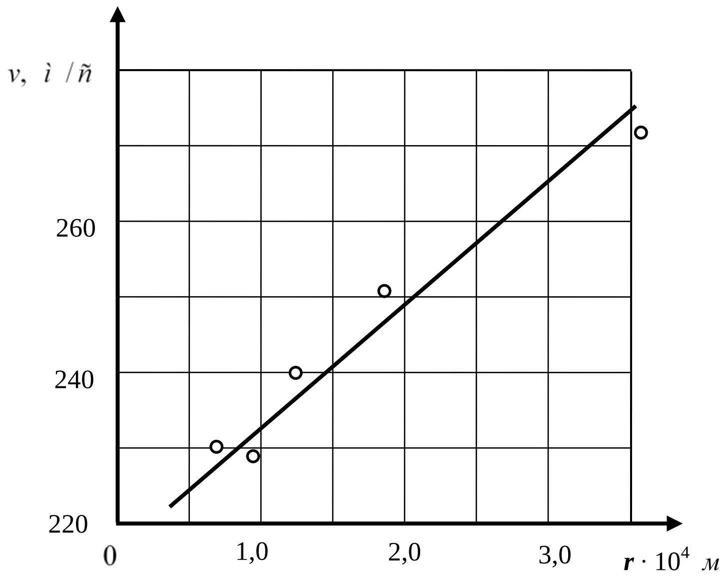

Рис. 1.

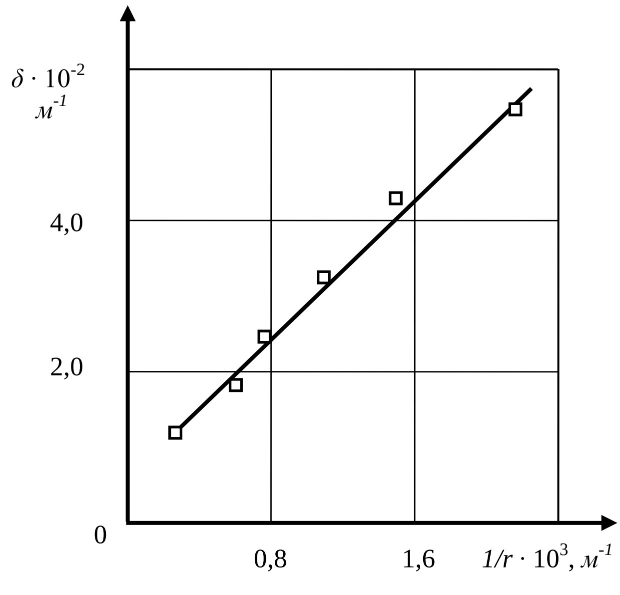

Рис. 2.

підтвердження: коефіцієнт поглинання ультразвукових хвиль частотою 70 кГц зворотно пропорційний радіусу частинок піску (рис. 2). Аналіз показав, що збільшення коефіцієнту поглинання ультразвуку зі зменшенням розмірів частинок пористого тіла пояснюється збільшенням втрат на тертя в точках контакту окремих зерен, кількість яких збільшується зі зменшенням розмірів зерен пористого тіла.

Висновки

1. Експериментально було показано, що капілярно-пористі тіла з зернистою структурою можна моделювати сукупністю пружних кульок однакового розміру зв'язаних між собою силами пружності, які можна розрахувати за теорією Герца. Швидкість ультразвуку при відсутності затухання не повинна залежати від розміру частинок пористого тіла. Експеримент показав незначне зростання швидкості ультразвуку із зменшенням розмірів зерен пористого тіла, яке пояснюється експериментально встановленим фактом, що коефіцієнт опору пропорційний квадрату радіуса зерен пористого тіла. Встановлено, що швидкість ультразвуку в пористому тілі пропорційна кореню шостого ступеня від зовнішнього тиску

2. Експериментально було встановлено, що коефіцієнт поглинання ультразвуку збільшується зі зменшенням розмірів частинок пористого тіла, що пояснюється збільшенням втрат на тертя в точках контакту окремих зерен, кількість яких збільшується зі зменшенням розмірів зерен пористого тіла.

3. Встановлено, що пористі тіла з зернистою структурою являють собою механічні системи, що мають властивості фільтрів нижніх частот. Отримано аналітичний вираз для граничної частоти та її залежність від розмірів частинок пористого середовища та швидкістю розповсюдження ультразвукових хвиль.

ЛІТЕРАТУРА

1. Haines W.B. Studies in the physical properties of solids IY. A further contribution of the theory of capillary phenomena in soil. The Journal of Agronomics Science, v. XYII , № 2, 1927, p. 264 – 269.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости, «Наука», М. 1965 г.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, «Физматгиз», М. 1958 г.
4. Анцифиров М.С., Анцифирова Н.Г., Каган Я.Я. Распространение упругих волн в чсухом песке, Известия АН СССР, сер. геоф. , № 12, 1964 г.
5. Лурье А.И. Операционное исчисление и его применение к задачам механіки, - ГИТТЛ, – М.: –Л., 1951 г.
6. Норин В.Н. О малых колебаниях цепей, - Учёные записки Пермского университета, №115, 1964 г. с. 65 – 74.

Надійшла 20.03.2009