УДК 69.04(075.8)

БАЖАНОВА А.Ю., БАЛДУК П.Г., СУРЬЯНИНОВ Н.Г.
Одесская государственная академия строительства и архитектуры

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА КРУГОВОЙ ТОНКОСТЕННОЙ АРКИ

Цель. *Решение задачи об устойчивости плоской формы изгиба круговой тонкостенной арки.*

Методика. *Преобразование дифференциальных уравнений В.З. Власова к дифференциальному уравнению шестого порядка относительно угла закручивания. Применение алгоритма численно-аналитического метода граничных элементов. Решение характеристического уравнения и анализ всех его корней.*

Результаты. *Определено число фундаментальных функций, необходимых для полного решения задачи об устойчивости плоской формы изгиба круговой тонкостенной арки.*

Научная новизна. *Получено дифференциальное уравнение устойчивости плоской формы изгиба тонкостенной арки кругового очертания. Уравнение имеет шестой порядок. Показано, что возможны семь комбинаций корней характеристического уравнения, а, значит, полное решение задачи определяется 448 аналитическими выражениями фундаментальных функций и соответствующими каждому варианту корней выражениями функций Грина и векторов нагрузки.*

Практическая значимость. *Полученные результаты позволяют аналитически построить полную систему фундаментальных функций рассматриваемой задачи, последующее использование которых дает возможность получить аналитические выражения функции Грина и векторов внешней нагрузки, а затем определить критическую нагрузку на арку при любых граничных условиях.*

Ключевые слова: *устойчивость, плоская форма изгиба, тонкостенная круговая арка, метод граничных элементов, фундаментальные функции.*

Введение. Арки являются одними из самых древних строительных конструкций. Первые стальные арки появились еще в Х1Х веке. Несколько позже началось изготовление арок из железобетона. На сегодняшний день арки и арочные конструкции получили широкое распространение в различных областях. Они изготавливаются из разных материалов, и применяются для производственных и общественных зданий, ангаров, складов, теплиц, деталей машин и механизмов и т.д.

Строительные арочные конструкции, как правило, под действием основных эксплуатационных нагрузок работают как сжато-изогнутые, поэтому наряду с расчетами на прочность, важнейшим является расчет на устойчивость.

Анализ последних исследований и публикаций. Значительный вклад в разработку теории и методов расчета стержневых систем на устойчивость внесли работы А.С. Вольмира, А.В. Геммерлинга, В.Г. Зубчанинова, В.Д. Клюшникова, Ю.Н. Работнова, А.Р. Ржаницына, С. Батдорфра, Д. Друккора, Е. Оната, Э. Стоуэлла, Р. Хилла и других. Благодаря этим работам появилась возможность решать конкретные задачи, одной из которых является задача об устойчивости арочных конструкций.

Основы общей теории криволинейных стержней, позволяющей изучать равновесие и устойчивость арок, заложены в трудах Г. Кирхгоффа, Р. Клебша, М.Ф. Окатова, Э.Х. Лява, А.И. Лурье, Е.Л. Николаи, С.П. Тимошенко [1, 2], А.Н. Динника [3] и других.

Постановка задачи. Вопрос об устойчивости арок и арочных систем и сейчас остается актуальным. Большинство современных публикаций связано с вопросом устойчивости арки в ее плоскости; исследований потери устойчивости плоской формы изгиба существенно меньше. Обобщение задач С.П. Тимошенко об устойчивости арок на тонкостенные профили принадлежит В.З. Власову. Эти результаты опубликованы в Дополнении к первому изданию монографии [2]. В данной работе предлагается использовать для решения уравнений устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных арок, полученных В.З. Власовым, численно-аналитический метод граничных элементов (ЧА МГЭ) [4, 5].

Результаты исследования. Как известно [4, 5], метод состоит в разработке фундаментальной системы решений (аналитически) и функций Грина (также аналитически) для рассматриваемой задачи. Для учета определенных граничных условий, или условий контакта между отдельными элементами системы составляется небольшая система линейных алгебраических уравнений, которую необходимо решать численно. Важнейшим этапом алгоритма ЧА МГЭ является аналитическое построение систем фундаментальных функций для всех возможных корней характеристического уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению задачи.

В.З. Власов получил уравнения устойчивости плоской формы изгиба круговой тонкостенной арки в виде

$$\begin{cases} EI_y W^{IV}(\alpha) + \dfrac{EI_\omega}{R}\theta^{IV}(\alpha) + \left(M_z - \dfrac{GI_d}{R}\right)\theta^{II}(\alpha) = 0; \\ EI_\omega \theta^{IV}(\alpha) - GI_d \theta^{II}(\alpha) + \left(M_z - \dfrac{EI_y}{R}\right) W^{II}(\alpha) = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где I_y, I_d, I_ω — осевой момент инерции, момент инерции при кручении и секториальный момент инерции.

Расчётная схема арки, положение осей и порядок отсчёта текущей координаты α показаны на рис. 1.

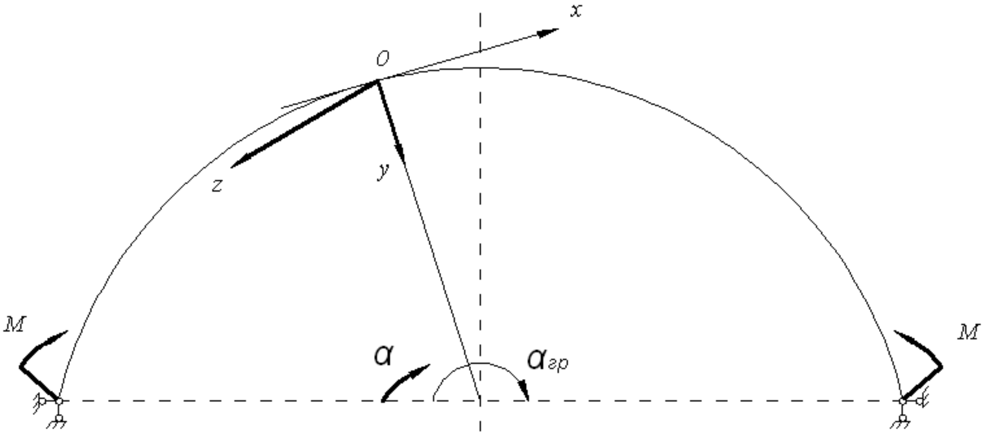

Рис. 1. **Расчётная схема арки**

Уравнения (1) записаны для тонкостенного сечения, имеющего две оси симметрии; для сечений с одной осью симметрии и несимметричных вид этих уравнений значительно усложняется.

Выразим перемещение $W^{II}(\alpha)$ из второго уравнения системы (1) и подставим в первое уравнение:

$$W^{II}(\alpha)=\frac{1}{M_z-\frac{EI_y}{R}}\left(-EI_\omega\theta^{IV}+GI_d\theta^{II}\right); \tag{2}$$

$$\frac{EI_y}{M_z-\frac{EI_y}{R}}\left(-EI_\omega\theta^{VI}+GI_d\theta^{IV}\right)+\frac{EI_\omega}{R}\theta^{IV}+\left(M_z-\frac{GI_d}{R}\right)\theta^{II}=0,$$

или

$$-\frac{EI_yEI_\omega}{M_z-\frac{EI_y}{R}}\theta^{VI}+\left(\frac{EI_yGI_d}{M_z-\frac{EI_y}{R}}+\frac{EI_\omega}{R}\right)\theta^{IV}+\left(M_z-\frac{GI_d}{R}\right)\theta^{II}=0\,. \tag{3}$$

Параметры кручения:

$$GI_d\theta(\alpha);\ GI_d\theta^{I}(\alpha);\ B_\omega=-EI_\omega\theta^{II}(\alpha);\ M_\omega=-EI_\omega\theta^{III}(\alpha).$$

Параметры изгиба из плоскости арки:

$$EI_YW(\alpha);\ EI_y\varphi(\alpha)=EI_yW^{I}(\alpha);\ EI_yW^{II}(\alpha)=-M_y(\alpha);\ EI_yW^{III}(\alpha)=-Q_z(\alpha)\,.$$

Введём обозначения:

$$z_1=\frac{EI_yEI_\omega}{M_z-\frac{EI_y}{R}};\ z_2=\frac{EI_yGI_d}{M_z-\frac{EI_y}{R}}+\frac{EI_\omega}{R};\ z_3=M_z-\frac{GI_d}{R}\,, \tag{4}$$

тогда (3) принимает вид

$$-z_1\theta^{VI}+z_2\theta^{IV}+z_3\theta^{II}=0. \tag{5}$$

Соответствующее характеристическое уравнение:

$$-z_1k^6+z_2k^4+z_3k^2=0\,. \tag{6}$$

Очевидно, что $k_{1,2}=0$ при всех вариантах корней уравнения (6).

Проанализируем возможные варианты остальных корней уравнения (6); они будут зависеть от соотношения коэффициентов z_1, z_2, z_3 и их знаков.

Перепишем (6) в виде

$$t^2-2r^2t-s^4=0\,, \tag{7}$$

где

$$t=k^2;\ r^2=\frac{z_2}{2z_1};\ s^4=\frac{z_3}{z_1}\,,$$

тогда

$$t_{1,2}=r^2\pm\sqrt{r^4+s^4}\,.$$

I. $|s|<|r|$.

<u>1 случай:</u> $r^4+s^4>0$; $s^4>0$ $\left(signZ_3=signZ_1\right)$:

$k_{1,2}=0$; $k_{3,4}=\pm\sqrt{r^2+\sqrt{r^4+s^4}}$ — действительные корни;

$k_{5,6}=\pm\sqrt{r^2-\sqrt{r^4+s^4}}$ — мнимые корни.

2 случай: $s^4 < 0$; $r^2 < 0$ $\left(signZ_2 = -signZ_1\right)$; $t_{1,2} < 0$:

$k_{1,2} = 0$; $k_{3,4} = \pm\sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 + s^4}}$ — мнимые корни;

$k_{5,6} = \pm\sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 + s^4}}$ — мнимые корни.

3 случай: $s^4 < 0$; $r^2 > 0$ $\left(signZ_2 = signZ_1\right)$; $t_{1,2} > 0$:

$k_{1,2} = 0$; $k_{3,4} = \pm\sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 + s^4}}$ — действительные корни;

$k_{5,6} = \pm\sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 + s^4}}$ — действительные корни.

II. $\left|s\right| > \left|r\right|$.

4 случай: $s^4 > 0$;

$k_{1,2} = 0$; $k_{3,4} = \pm\sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 + s^4}}$ — действительные корни;

$k_{5,6} = \pm\sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 + s^4}}$ — мнимые корни.

5 случай: $s^4 < 0$;

$k_{1,2} = 0$; $k_{3,4} = \pm\sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 + s^4}}$ — мнимые корни;

$k_{5,6} = \pm\sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 + s^4}}$ — мнимые корни.

III. $s = r$.

6 случай: $s^4 > 0$; $r^2 > 0$;

$k_{1,2} = 0$; $k_{3,4} = \pm\sqrt{r^2 + r^2\sqrt{2}} = \pm r\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ — действительные корни;

$k_{5,6} = \pm r$ — действительные корни.

7 случай: $s^4 > 0$; $r^2 < 0$;

$k_{1,2} = 0$; $k_{3,4} = \pm ir\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ — комплексные корни;

$k_{5,6} = \pm ir$ — комплексные корни.

8 случай: $s^4 < 0$; $r^2 > 0$;

$k_{1,2} = 0$; $k_{3,6} = \pm r$ — действительные корни;

9 случай: $s^4 < 0$; $r^2 < 0$;

$k_{1,2} = 0$; $k_{3,6} = \pm ir$ — комплексные корни.

Выводы. Анализ показывает, что случаи 5 и 2, а также 4 и 1 можно объединить (корни одинаковые при $\left|s\right| > \left|r\right|$ и $\left|s\right| < \left|r\right|$).

Таким образом, задача об устойчивости плоской формы изгиба тонкостенной арки приводит к семи комбинациям корней характеристического уравнения, а, значит, полное решение задачи будет определяться 448 аналитическими выражениями фундаментальных функций и соответствующими каждому варианту корней выражениями функций Грина и векторов нагрузки.

Список использованной литературы

1. *Timoshenko S.P.* Buckling of flat curved bars and slightly curved plates / S.P. Timoshenko — ASME J. Appl. Mech. 2, 1935 — P. 17-20.

2. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем: учебник / С. П. Тимошенко; пер. С. П. Снитко. — 2-е изд. — М. : Гостехиздат, 1955. — 568 с.

3. *Динник А.Н.* Устойчивость арок / А.Н. Динник. — М.-Л.: Гостехиздат, 1946. — 156 с.

4. *Дащенко А.Ф.* Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов — Одесса: ВМВ, 2010. — В 2–х томах. — Т.1. — 416 с. — Т.2. — 512 с.

5. *Оробей В.Ф.* / Основные положения численно-аналитического варианта МГЭ. — Труды Санкт-Петербургского политехнич. ун-та / В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов — Инженерно-строительный журнал. — № 4 (22). — СПб, 2011. — С. 33-39.

References

1. *Timoshenko S.P.* Buckling of flat curved bars and slightly curved plates / S.P. Timoshenko — ASME J. Appl. Mech. 2, 1935 — P. 17-20.

2. *Timoshenko S. P.* Ustojchivost' uprugih sistem: uchebnik / S. P. Timoshenko; per. S. P. Snitko. — 2-e izd. — M. : Gostekhizdat, 1955. — 568 p.

3. *Dinnik A.N.* Ustojchivost' arok / A.N. Dinnik. — M.-L.: Gostekhizdat, 1946. — 156 p.

4. *Dashchenko A.F.* CHislenno-analiticheskij metod granichnyh ehlementov / A.F. Dashchenko, L.V. Kolomiec, V.F. Orobej, N.G. Sur'yaninov — Odessa: VMV, 2010. — V 2–h tomah. — T.1. — 416 s. — T.2. — 512 p.

5. *Orobej V.F.* / Osnovnye polozheniya chislenno-analiticheskogo varianta MGEH. — Trudy Sankt-Peterburgskogo politekhnich. un-ta / V.F. Orobej, N.G. Sur'yaninov — Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. — № 4 (22). — SPb, 2011. — P. 33-39.

СТІЙКІСТЬ ПЛОСКОЇ ФОРМИ ЗГИНУ КРУГОВОЇ ТОНКОСТІННОЇ АРКИ

БАЖАНОВА А.Ю., БАЛДУК П.Г., СУР'ЯНІНОВ М.Г.
Одеська державна академія будівництва та архітектури

Мета. *Розв'язок завдання про стійкість плоскої форми згину кругової тонкостінної арки.*

Методика. *Перетворення диференціальних рівнянь В.З. Власова до диференціального рівняння шостого порядку щодо кута закручування. Застосування алгоритму числено-аналітичного методу граничних елементів. Розв'язок характеристичного рівняння й аналіз усього його корінь.*

Результати. *Визначене число фундаментальних функцій, необхідних для повного розв'язку завдання про стійкість плоскої форми згину кругової тонкостінної арки.*

Наукова новизна. *Отримане диференціальне рівняння стійкості плоскої форми згину тонкостінної арки кругового обрису. Рівняння має шостий порядок. Показане, що можливі сім комбінацій корінь характеристичного рівняння, а, виходить, повний розв'язок завдання визначається 448 аналітичними вираженнями фундаментальних функцій і відповідними до кожного варіанта коренів вираженнями функцій Гріна й векторів навантаження.*

Практична цінність. *Отримані результати дозволяють аналітично побудувати повну систему фундаментальних функцій розглянутого завдання, наступне використання яких дає можливість одержати аналітичні вираження функції Гріну й векторів зовнішнього навантаження, а потім визначити критичне навантаження на арку при будь-яких граничних умовах.*

Ключові слова: *стійкість, плоска форма згину, тонкостінна кругова арка, метод граничних елементів, фундаментальні функції.*

STABILITY OF CIRCULAR BEND FLAT SHAPE OF THIN-WALLED ARCH

BAZHANOVA A.Y., BALDUK P.G., SURYANINOV N.G.
Odessa State Academy of Construction and Architecture

Purpose. *Solution of the problem of the stability of the plane form of bending of thin-walled circular arches.*

Methodology. *Transformation of differential equations V.Z. Vlasov to the differential equation of the sixth order with respect to the angle of twist. The use of algorithms for numerical and analytical boundary element method. The solution of the characteristic equation and analysis of all its roots.*

Results. *It determines the number of basic functions needed for a complete solution to the problem of the stability of the plane form of bending of thin-walled circular arches. Scientific novelty. The differential equation stability of a planar form bending of thin-walled circular arch shape. Equation is the sixth order. It is shown that the seven possible combinations of the roots of the characteristic equation, which means that the complete solution of the problem is determined 448 analytical expressions of the fundamental functions and the corresponding roots of each variant expressions of Green's functions and load vectors.*

Practical value. *The results obtained analytically to build a complete system of fundamental functions of the problem, followed by the use of which makes it possible to obtain analytical expressions of the Green's function and the vectors of the external load, and then determine the critical load to the arch under any boundary conditions.*

Key words: *stability, the flat shape of the bend, a thin-walled circular arch, boundary element method, the fundamental functions.*