3. Кови Стивен Р. Семь навыков высокоэффективных людей: Мощные инструменты развития личности/ Пер.с англ. – 2-е изд. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2007. – 374 с.
4. Кови Стивен Р. Восьмой навык: От эффективности к величию/Пер.с англ. – 2-е изд. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2008. – 408 с.
5. Корнейчук Б.В. Информационная экономика. Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2006. – 400 с.: ил. – (Серия «Учебное пособие»).
6. Фитц-енц Як. Рентабельность инвестиций в персонал: изменение экономической ценности персонала// – М.: Вершина, 2009. – 320 с.
7. Edvinsson L., Malone M.S. Intellectual Capital. Realizing Your Company’s True Value by Finding Its Hidden Brainpower. – Harper Collins – New York, 1997.
8. Janine Nahapiet, Sumantra Ghoshal. Social Capital, Intellectual Capital and the Organizational Advantage// Academy of Management Review. – 1998. – Vol.23. – №2.– P. 242-266.
9. http://www.forumforthefuture.org/

Надійшла 03.11.2010

УДК 658.1: 314.7

ДЕТЕРМІНОВАНІ ТА СТОХАСТИЧНІ МОДЕЛІ МІГРАЦІЇ НАСЕЛЕННЯ

О.Р. ОВЧИННІКОВА, О.О. КУЛИКОВ

Хмельницький національний університет

У роботі проаналізовано застосування математичних моделей в дослідженні міграційних процесів. Розглянуто детерміновану модель з дискретним часом міжгрупового руху населення, модель руху активного населення з безперервним часом та стохастичні моделі руху населення. Показано приклад графів марківських процесів, отримані рівняння для імовірностей переходів мігрантів з одного стану в інший за будь-який час у загальному вигляді

Глибокі суспільні й економічні зміни, що відбуваються в Україні впливають і на формування міграційної поведінки населення. Сьогодні міграція висуває нові вимоги до діяльності державних органів влади, її характеристики багато в чому визначають напрямок соціально-економічного розвитку країни або регіону. Без сумніву, дослідження міграційних переміщень населення, а саме оцінка якісної та кількісної структури міграційного потоку, сьогодні не може обійтися без застосування математичних моделей і методів.

До питань моделювання міграції звертались багато вчених, серед них О.Старовєров, О. Хомра, В.Іонцев, Т.Петрова та ін. За допомогою моделей міграційних потоків можна визначити величини міграційних потоків в залежності від характеристик територій [5]. Статистичні регресійні моделі описують залежність міграційних характеристик від виділених факторів з метою отримання кількісної оцінки впливу цих факторів на міграції населення; задачами динамічних регресійних моделей є кількісна оцінка впливу економічних і неекономічних факторів на міграцію населення з врахуванням тенденції розвитку міграційних процесів [7]. За допомогою Марківських моделей можна аналізувати і прогнозувати розвиток міграційної структури, досліджувати різні економічні процеси та процеси відтворення населення і соціальної мобільності з врахуванням імовірносно-статистичних особливостей міграційного руху, а також вивчати і прогнозувати перерозподіл всього населення або його окремих соціальних груп [1].

Інтеракційні моделі міграції розв’язують задачу аналізу, планування і прогнозування величини різного роду потоків між елементами різноманітних територіальних систем (міст, підприємств та ін.), що складаються з одиниць (людей, товарів тощо), які здатні переміщуватися від одного елементу до іншого. Існують також гравітаційні моделі, які можна представити як загальну інтеракційну модель, в якій в якості виміру маси використовують чисельність населення районів входу і виходу [3]. Мікро моделювання побудоване на дослідженні міграційної поведінки окремої людини або сім’ї, аналізу процесів прийняття рішень. На сьогоднішній день мікро моделювання міграції майже не розвинуто.

Багато з міграційних моделей добре розроблені, але існують деякі недоліки. Наприклад недостовірні вихідні дані, які використовуються при моделюванні процесів міграції, ставлять під сумнів інформацію, отриману за допомогою цих моделей. Проте закономірності статистичних співвідношень щонайкраще можна осмислити і сприйняти саме на основі математичних і математико-статистичних рівнянь або нерівностей, що зв’язують одні фактори з іншими, тому область застосування математичних методів і моделей у дослідженні міграції досить велика.

Результати та їх обговорення

Розглянемо детерміновану модель з дискретним часом міжгрупового руху населення, наприклад населення, що знаходиться в працездатному віці [2]. Проведені спостереження дозволяють сформувати ряд тверджень і на їх підставі одержати модель. Будемо вважати, що з населення по яких-небудь ознаках виділено *к* груп і що при малому проміжку часу Δ (Δ- 0) виконані наступні припущення.

Припущення 1. Чисельність людей, що вибули з групи *i* за період Δ, пропорційна як чисельності групи $n_{i,}$ так і тривалості періоду Δ і не залежить від числа вибулих з інших груп. Це припущення не означає, звичайно, що коефіцієнт пропорційності $r_i \geq 0$ – постійна величина, він може залежати від ряду факторів, що, наприклад змінюються в часі. Вибулі перерозподіляються серед усіх груп відповідно до припущення.

Припущення 2 Частка тих хто перейшов у групу j (j=1,2,...,к) серед усіх тих, хто вийшов із групи j (j=1,2,...,к) не залежить від числа переходів з інших груп. Тут зневажається часом переходу з однієї групи в іншу, тобто вважається, що він набагато менше, ніж Δ. Через те, що чисельність груп змінюється також за рахунок населення, що не ввійшло в число виділених груп, припустимо, що справедлива наступна гіпотеза.

Припущення 3. Зміна чисельності виділеної групи *i* у малий проміжок часу Δ за рахунок зовнішніх прибувших та вибувших пропорційно цьому проміжку часу і не залежить від чисельності групи. Коефіцієнти пропорційності a_i можуть бути як позитивними, так і негативними. Введемо позначення. Нехай n(t)— вектор - стовпець чисельності груп на момент часу t, його і-я компонента $n_i(t)$ (i = l, 2, ..., k) чисельність *i* -ї групи. Тоді відповідно до припущення 1. $r_i\,\Delta$- величина, що показує, скільки вибулих за період Δ із групи *i* людей приходиться на одну людину групи на початок періоду. Нехай p_{ij} — частка серед вибулих із групи *i* поступивши у групу j. Якщо ми розглядаємо тільки таку групу, у якій надходяться усі вибулі, — повну систему груп, то $\sum_{i=1}^{k} = 1$ (i=1, 2, ...,k), $p_{ij} \geq 0$.

У більш загальному випадку $\sum_{i=1}^{k} \leq 1$ — система групи неповна. Для простоти всі зміни, пов'язані з зовнішніми змінами, будемо враховувати у векторі а. Позначимо через R діагональну матрицю з елементами $\delta_{ij}r_j$, а через P— матрицю з елементами $p_{ij} \geq 0$.

Легко встановити, що RΔn(t) являє собою вектор-стовпець, *i*-я компонента якого дорівнює числу вибулих із групи *i*, а P'RΔn(t) -вектор-стовпець, *i*-я компонента якого є число поступивших у групу *i* із усіх виділених груп. Таким чином, основне рівняння моделі можна представити у виді:

$$п(t + \Delta) = п(t) — R\Delta n(t) + P'R\Delta n(t) + a\Delta, \qquad (1)$$

де а — вектор-стовпець зовнішніх змін.

Воно описує еволюцію вектора n(t) під впливом перерозподілів, а також через зовнішні зміни а за час Δ. Позначимо через A_1 матрицю:

$$I-(I-P')R\Delta = A_1 \qquad (2)$$

У цих позначеннях основне рівняння моделі руху активного населення (відкриті групи):

$$п(t + \Delta) = A_1 n(t) + a\Delta.$$

Якщо далі припустити, що зовнішніми змінами можна зневажати (тобто а=0), то

$$n(t + \Delta) = A_1 n(t), \qquad (3)$$

і являє собою основне рівняння руху активного населення замкнутих груп.

Дана модель дозволяє дослідити статистичні дані міграції населення, міжгалузевого і інших видів руху населення, вважається, що з великих груп йдуть і великі потоки людей, що потім перерозподіляються між групами. Ці зміни в чисельності населення обмежені в часі.

Розглянемо модель руху активного населення з безперервним часом [2].

У тих же умовах (припущення 1–3) тепер легко установити модель міжгруппового руху активного населення в безперервному часі, що краще відбиває дійсне положення справ, тому що реальний рух населення відбувається саме в безперервному часі.

Після переносу в співвідношенні (1) n(t) у ліву частину, розподіли на Δ, і переходу до межі при Δ→0 маємо диференціальне рівняння

$$\frac{dn(t)}{dt} = Rn(t) + P'Rn(t) + a \qquad (4)$$

При відсутності зовнішніх змін а =0, тому рівняння (4) має вигляд

$$\frac{dn(t)}{dt} = (P' - I)Rn(t) \qquad (5)$$

Позначимо через C_1, матрицю $(P^1 - I)$ R, тобто

$$C_1 = (P^1 - I)R \qquad (6)$$

У позначеннях (6) диференціальне рівняння (4) є безперервним аналогом кінцево-різницевого рівняння (2) і у визначеній мері відбиває рух населення в сукупності відкритих його груп, а диференціальне рівняння (5) аналогічно рівнянню (3) у кінцевих різницях.

Незважаючи на дуже грубі обмеження, що приводять до рівнянь (5) і (3), такі моделі руху населення досить інтенсивно вивчалися і, як уже відзначалося, приводили до прийнятних результатів.

Однак, оскільки в описі міграційної системи існує елемент невизначеності або через те, що система не цілком визначена, або через непередбачений характер поводження людини (наприклад, неможливо передбачити з точністю, коли людина зважиться виїхати за рубіж, перемінити місце проживання чи повернутися назад), то модель міграції є стохастичною. Саме внутрішня невизначеність, властива свободі вибору, якою володіє індивідуум, змушує представляти нашу модель у стохастичній формі. Розглянемо суть моделювання стохастичної міграційної системи. Представимо міграційну систему марківським процесом з дискретними станами, зображеними на рис.1.

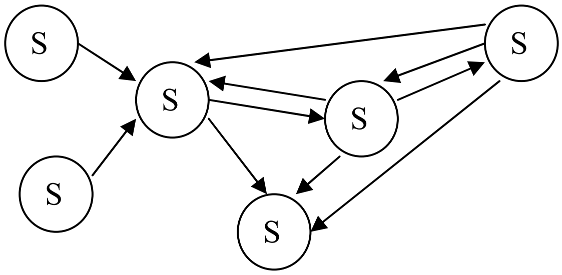

Рис. 1. **Граф станів міграційної системи**

На рис.1. використані наступні позначення: S_1–стабільне населення; S_2–потенційна міграція; S_3–міграція; S_4–імміграція; S_5–народжуваність; S_6–смертність. Переходи позначені: S_1S_2– потік «потенційної міграції» (бажаючі мігрувати); S_1S_3– потік безпосередньої міграції (виїзд); S_1S_6– смертність населення (безповоротне вибуття); S_2S_3–потік міграції (виїзд); S_3S_1– потік рееміграції(повернення в стан S_1); S_3S_2– потік рееміграції (повернення в стан S_2 – «потенційна міграція»); S_3S_6–безповоротне вибуття; S_2S_6–безповоротне вибуття; S_4S_1– потік імміграція; S_5S_1–народжуваність.

Будемо вважати, що марківський ланцюг описує поводження міграційної системи на однакових інтервалах часу. Тоді випадковий процес, що відбувається в системі, буде полягати в тому, що в послідовні моменти часу t_1,t_2,t_3 елемент системи буде знаходитися в тих чи інших станах, ведучи себе, наприклад у такий спосіб: $S_1 \to S_2 \to S_3 \to S_1 \to S_2 \to S_2 \to S_3 \to S_2 \to S_2 \to S_1$

Наочно зобразити всю множину можливих послідовностей станів дозволить побудова дерева логічних можливостей. На рис.2. представлено дерево логічних можливостей для кроків, що відповідають графу станів системи, приведеної на рис.1.

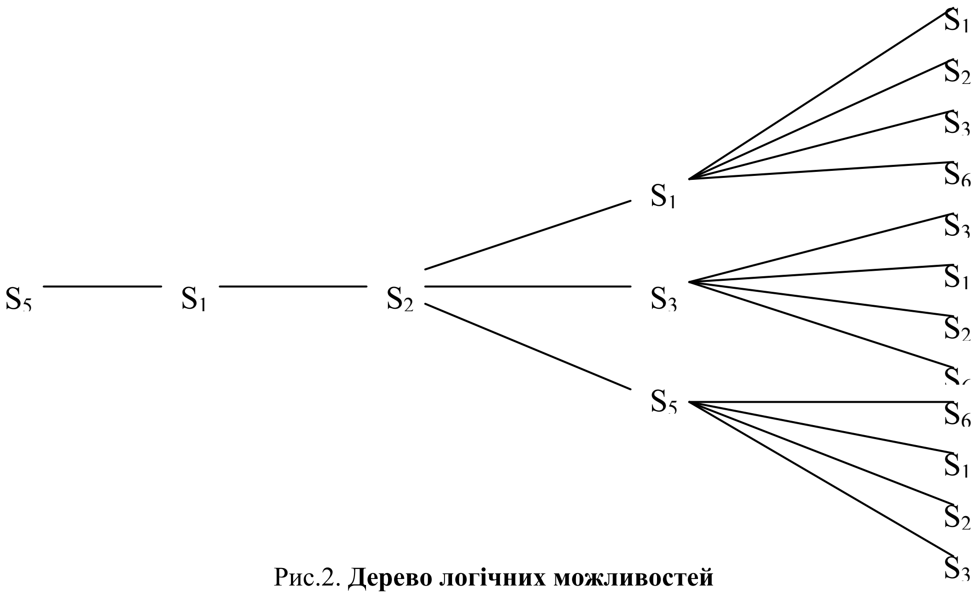

Рис.2. **Дерево логічних можливостей**

Нехай система має дискретну множину станів $S_i\left(i=\overline{1,K}\right)$. У моменти часу $t_0 < t_1 ... < t_r < ...\left(r=\overline{0,R}\right)$ система випадковим образом і стрибкоподібно змінює свої стани, таким чином, мають місце переходи $S_0(t_0) \to S_1(t_1) \to S_1(t_2) \to S_2(t_3) \to ...$,

де $S_0(t_0)$ – початковий стан системи.

Послідовність станів утворить ланцюг Маркова, якщо для всіх $t_0 > t_1 > t_2 > ...$ і всіх можливих станів має місце співвідношення:

$$p_r\{S_k \mid S_0, S_1, ..., S_{k-1}\} = p_r\{S_k \mid S_{k-1}\} \quad . \tag{7}$$

Якщо імовірності переходу не міняються з часом, тобто не залежать від номера кроку *r*, тобто $p_r\{S_k \mid S_{k-1}\} = p_{r-1}\{S_k \mid S_{k-1}\}$, то ланцюг Маркова називається однорідним, і для позначення ймовірностей переходу будемо використовувати p_{ij}. В іншому випадку ланцюг Маркова неоднорідний, а позначення ймовірностей переходу буде $p_{ij}(r)$.

Моделювання міграції населення на основі марківських ланцюгів дає можливість знайти кількість потенційних мігрантів у визначений момент часу, середній час перебування в цьому стані, імовірність і кількість повернень населення зі стану потенційна міграція у стан населення і навпаки; знайти кількість мігрантів у визначений момент часу, середній час перебування в цьому часі, імовірність і кількість повернень населення зі стану міграція у стан населення; знайти кількість населення у визначений момент часу і імовірності та кількості потоків у стани потенційна міграція та міграція. Розглянемо інші моделі руху населення, враховуючи визначені елементи випадковості [6].

Далі буде розглядатися *k* груп населення, виділених по яких-небудь ознаках. Якщо в якості ознаки взята місцевість проживання, то буде розглядатися між- і внутрішньорайонна міграція. Будемо виділяти не групи в цілому, а окремих індивідуумів, що належать до групи, і говорити для стислості про члена групи. Розглянемо довільно узятого члена групи *i* (*i* = 1,2, . , *k*) і виділимо припущення, що нам необхідні для побудови моделі.

Припущення 6. Імовірність виходу з групи *i* будь-якого її члена за малий проміжок часу $\Delta(\Delta \to 0)$ пропорційна цьому проміжкові часу. Позначимо коефіцієнт пропорційності (інтенсивність виходу) - r_i,.

Припущення 7. Імовірність переходу будь-якої людини в групу j може залежати лише від групи *i*, з якої він вийшов, але не залежить від того, як він у цю групу *i* потрапив.

Позначимо імовірність переходу через P*i*j $\left(\sum_{i}^{k} p_{ij} \geq 1\right)$.

У більшості моделей такого сорту, завжди передбачається справедливість ще однієї гіпотези.

Припущення 8. Любий член групи діє незалежно від поводження інших членів, іншими словами, поводження якої-небудь людини робить зневажливо малий вплив на поводження будь-якого іншого.

Розглянемо тепер імовірність $P_{ij}(t)$ у момент часу t знайти в групі j деякого зафіксованого в момент t=0 члена групи *i*.Позначимо через P матрицю з елементами p_{ij} що фігурує в припущенні 7; через P(t) матрицю із шуканими імовірностями $P_{ij}(t)$. Тепер одержимо рівняння для шуканих імовірностей переходів $P_{ij}(t)$.

З формули повної імовірності випливає, що виконано наступну рівність:

$$P_{ij}(t+\Delta) = P_{ij}(t)(1-r_j\Delta) + \sum^{k}_{i=1} P_{ij}(t)r_i\Delta p_{ij}.$$

В матричному виді цю рівність можна записати так:

$$P(t+\Delta) == P(t) — P(t)R\Delta + P(t)RP\Delta, \tag{8}$$

де $R = \| r_j\delta_{ij} \|$ (r_j, фігурують у припущенні 6),

а δ_{ij}— символ Кронекера ($\delta_{ij}=1$ при $i=j$ і $\delta_{ij}=0$ при $i\neq j$).

Тепер (якщо $\Delta=1$) ми маємо рівняння для матриці P(t) у кінцевих різницях:

$$P(t+1) = P(t)(I - R + RP), \tag{9}$$

де $I = \|\delta_{ij}\|$ — одинична матриця розміру *k x k*.

Після нескладних перетворень рівняння (9) одержуємо, що $(P(t+\Delta)-P(t))/\Delta = P(t)R(p-I)$, і після переходу до межі при $\Delta\to 0$ маємо диференціальне рівняння для $P_{ij}(t)$ у матричному записі:

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)R(P—I). \tag{10}$$

Таким чином, у результаті рішення рівняння (9) або (10) з початковими даними P(0)=I отримується матриця P(t) переходів індивідуумів зі стану *i* в стан j за довільний час *i*. Отримані рівняння (9) і (10) при R=I перетворюються в добре відомі рівняння для матриць перехідних імовірностей марківських процесів, які застосовуються для моделювання активного населення [4]. Отже, отримані рівняння для імовірностей переходів за будь-який час у більш загальному виді.

Висновки

Таким чином, розглянуті нами детерміновані і стохастичні моделі руху населення дають змогу дослідити рух населення між групами обмеженими чи не обмеженими в часі. Стохастичні моделі більш близькі до реальності, що дає змогу оцінити більш слабкі місця моделей міграції населення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бартеломью Д. Стохастические модели социальных процессов. - М.: Финансы и статистика, 1985. – 295 с.
2. Венецкий И.Г. Математические методы в демографии. – М.: Статистика, 1971.–296с.
3. Денисенко М.Б., Ионцев В.А., Хорев Б.С. Миграциология. – М.: –1989.
4. Переведенцев В.И. Методы изучения миграции населения. – М.: –1975.
5. Рыбаковский Л.Л. Миграции населения: прогнозы, факторы, политика.– М.: – 1987.
6. Староверов О.В. Модели движения населения. – М.: Наука, – 1979. – 342 с.
7. Хомра А.У. Миграция населения: вопросы теории, методика исследования. – К.: Наукова думка, – 1979. – 146 с.

Надійшла 03.11.2010