УДК 519.21

ПРО ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ СТАТИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

С. М. КРАСНИТСЬКИЙ

Київський національний університет технологій та дизайну

Розглядається інтегральне рівняння, яке є спектральним аналогом відомого рівняння у згортках Вінера – Хопфа для узагальнених функцій. До рівнянь даного типу зводиться досить значна кількість задач статистики випадкових полів. Наводяться умови існування розв'язку цих рівнянь, що формулюються в термінах спектральних характеристик таких полів

Деякі задачі розрізняння гіпотез та прогнозування випадкових процесів і полів приводять до необхідності розв'язання певних інтегральних рівнянь, які відносяться до класу так званих рівнянь Вінера – Хопфа або їх узагальнень [2-5]. Досить важливим є питання про існування їх розв'язків, відповідь на яке бажано дати в термінах тих чи інших ймовірнісних характеристик випадкових функцій (згаданих вище процесів або полів).

Об'єкти та методи дослідження

Об'єктом дослідження даної роботи є рівняння у згортках типу Вінера – Хопфа, в якості одного з параметрів якого виступає ймовірнісна характеристика однорідного випадкового поля, яка в залежності від ситуації може інтерпретуватися як спектральна щільність даного поля або як добуток таких щільностей. Даний круг питань розглядався, наприклад, у роботах [2-5], присвячених статистичним задачам для стаціонарних випадкових процесів або однорідних випадкових полів. У пропонованій роботі розглядаються рівняння типу Вінера – Хопфа, котрі виникають при розв'язанні вищезгаданих статистичних задач для узагальнених однорідних полів [4]. Наведені результати узагальнюють деякі положення з даного приводу, що одержані раніше в роботах автора [6-8].

Основним методом дослідження служить перетворення Фур'є узагальнених функцій.

Постановка завдання

Нехай Φ – підмножина простору $S = S^{N}$ швидко спадаючих нескінченно диференційованих функцій на евклідовому просторі R^N [1], a – узагальнена функція (функціонал) на Φ, $f = f(\lambda)$, $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_N)\in R^N$ — невід'ємна функція на R^N, що для деякого $\beta \geq 0$ задовольняє умові

$$\int (1+|\lambda|^2)^{-\beta} f(\lambda)\, d\lambda < +\infty, \tag{1}$$

де $|\lambda|$ – евклідова норма, а знак інтегралу без вказівки на множину інтегрування означає інтегрування по всьому простору R^N. Нас будуть цікавити умови, яким повинна задовольняти функція a, для того, щоб при певних припущеннях щодо функції f існував розв'язок $c(\lambda)$ рівняння

$$a(\varphi) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\bar{c}(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \tag{2}$$

в якому знак ~ над літерою є символ перетворення Фур'є, а розв'язок c розшукується в класі (комплекснозначних) функцій, що задовольняють вимозі

$$\int |c^2(\lambda)| f(\lambda)\, d\lambda < +\infty. \tag{3}$$

Результати та їх обговорення

1. *Означення*. Простором $\mathrm{R}^{0}_{2,1/f}$ буде називатися сукупність функцій $\{g(\cdot):R^{N}\to C^{1}\}$, що дорівнюють 0 на множині нулів функції f і таких, що

$$\int\limits_{\{x:f(x)\neq 0\}} |g(x)|^{2} f^{-1}(x)dx < +\infty. \tag{4}$$

Зауважимо, що ми вважаємо дві функції з $\mathrm{R}^{0}_{2,1/f}$ рівними, якщо вони відрізняються одна від одної не більш ніж на множині лебегової міри l^{N}, рівній 0, так що у випадку $l^{N}\{\lambda: f(\lambda)=0\}=0$ вимога обертання в 0 на множині нулів функції f не має значення.

2. *Зауваження.* Якщо функція $f(\cdot)$ належить L_p, $1\le p\le +\infty$, то кожна функція $g(\cdot)$ класу $\mathrm{R}^{0}_{2,1/f}$ належить L_q, де $q=2p(1+p)^{-1}$. Зокрема, якщо $f(\cdot)\in L_1$, то $g(\cdot)\in L_1$, а якщо $f(\cdot)\in L_\infty$, то $g(\cdot)\in L_2$ (див. [6,7]).

Позначимо для деякого простору A основних функцій на R^{N} через $U(A)$ множину звичайних функцій $l(\cdot)$: $R^{N}\to C^{1}$, кожна з яких, визначає деяку узагальнену функцію з A'. Якщо $l(\cdot)\in U(A)$, то функціонал з A', що визначається функцією $l(\cdot)$ позначається тією ж самою літерою l, так що $< l,\varphi > = \int \overline{l}(x)\varphi(x)dx$, $\varphi\in A$. З урахуванням визначення має очевидний зміст запис $U(A)\subset A'$.

3. *Означення.* Простір A має $U_f(A)$ – властивість (коротше, U_f – властивість), якщо має місце співвідношення $\mathrm{R}^{0}_{2,1/f}\subset U(A)$.

Виявляється зручним, окрім згаданого вище простору S і, відповідно, простору узагальнених функцій S' використовувати і інші простори основних і узагальнених функцій [1].Всі абстрактні простори основних функцій вважатимуться в даній роботі підмножинами простору S. Надалі, якщо треба буде підкреслити, що пряме (зворотне) перетворення Фур'є деякого функціоналу b виконується над певною парою спряжених (двоїстих) просторів основних функцій (A,B), то будуть використовуватися позначення типу $(\widetilde{b})_{AB}$ $((\hat{b})_{AB})$ або, коротше, $(\widetilde{b})_A$ $((\hat{b})_A)$. При $A=B=S$ писатимемо $(\widetilde{b})_S$ або просто $\widetilde{b}$. Якщо позначення вказаних просторів містять індекси, наприклад, (A_1,B_1), (A_2, B_2), то можливі записи типу $(\widetilde{b})_1$, $(\hat{b})_2$ тощо.

4. **Теорема**. *Нехай* (A,B) – *пара двоїстих просторів основних функцій на* R^{N}, *причому* $\Phi\subset A$. *Для виконання* (2),(3) *достатньо, щоб знайшлася узагальнена функція* $a^{\infty}\in A'$ *для якої перетворення Фур'є* $(a^{\infty})^{\sim}$ *задовольняє співвідношенню*

$$(a^{\infty})^{\sim}\in \mathrm{R}^{0}_{2,1/f}\cap U(B) \tag{5}$$

причому

$$< a,\varphi > = < a^{\infty},\varphi >, \ \varphi\in\Phi \tag{6}$$

Навпаки, якщо мають місце (5), (6) *і при цьому простір B має* U_f *-властивість, то знайдеться функціонал* $a^{\infty} \in A'$*, для якого виконується* (5), (6).

Зокрема, простір S має U_f- властивість, так що справедливим є наступне твердження:

5. Теорема. *Для того, щоб мало місце (5), (6), необхідно і досить, щоб значення функціоналу* $a(\varphi)$, $\varphi\in\Phi$, *співпадали із звуженням на* Φ *деякого функціоналу* $a^{\infty} \in S'(R^N)$, *перетворення Фур'є якого* $\widetilde{(a^{\infty})}$ *є звичайна функція* $\widetilde{(a^{\infty})}(\lambda)$, *для якої*

$$\widetilde{(a^{\infty})}(\lambda) \in \mathrm{R}^{0}_{2,1/f}. \tag{7}$$

6. *Означення.* Нехай (A_1,B_1), (A_2, B_2) – дві пари спряжених просторів основних функцій, $b\in A_2'$. Припустимо, що $(\widetilde{b})_2$ є звичайною функцією, що належить $U(B_2) \cap U(B_1)$ [1] . Тоді має очевидний зміст вираз $\hat{((\widetilde{b_2}))}_1$ (пряме перетворення Фур'є береться над (A_2, B_2), а зворотне – над (A_1,B_1)). Вказаний вираз визначає функціонал над простором A_1, який будемо називати (A_1, A_2, F) - розширенням або, коротше, F-розширенням функціоналу b.

Може статися, що при умові $\Phi\subset A$ пара основних просторів (A,B) не є зручною для конструктивного опису умови (7), в той час як для деякої іншої пари (C,D) відповідна умова є досить прозорою. Такій ситуації відповідає наступне твердження.

7. Теорема. Нехай (A_1, B_1), (A_2, B_2) – два спряжених простори основних функцій, $\Phi \subset A_1$. Якщо знайдеться функціонал $b\in B_2'$, такий, що $(\widetilde{b})_2\in R^0_{2,1/f}$ і для якого функціонал a є звуженням на Φ деякого (A_1, A_2, F)- розширення зазначеного функціоналу b, то задача (2), (3) має розв'язок. Якщо задача (2), (3) має розв'язок і, крім того, простори B_1 та B_2 володіють U_f - властивістю, то знайдеться функціонал $b\in A_2$, що має всі описані у першій частині теореми властивості.

▸ Достатність. Функціонал $a^{\infty} = \hat{((\widetilde{b_2}))}_1$ є розширенням функціоналу a на простір A_1, що задовольняє всім належним умовам теореми 4. Необхідність. Згідно згаданій теоремі, завдяки наявності $U_f(B_1)$ - властиввості знайдеться функціонал $a^{\infty}\in A_1'$, що є розширенням функціоналу a і для якого $\widetilde{a}^{\infty}$ належить $U(B_1)\cap R^0_{2,1/f}$. Оскільки B_2 також має U_f - властивістю, то $\widetilde{a}^{\infty}$ належить і $U(B_2)$, тому є визначеним функціонал $b = \hat{(\widetilde{a}^{\infty})}_2$, існування якого і стверджується. ◂

8. *Наслідок.* Нехай $A \subset S$, топологія A не слабкіша за індуковану в A простором S, $\Phi \subset S$. Тоді для існування розв'язку задачі (2), (3) необхідно і досить, щоб функціонал a був звуженням на Φ (S, A, F) - розширення деякого функціоналу $b \in A'$, для якого $(\widetilde{b})_A \in \mathrm{R}^{0}_{2,1/f}$.

▸ Покладемо $A_1 = S$, $A_2 = A$. Тоді в наших умовах B_1 та B_2 мають U_f- властивість. ◂

9. *Наслідок.* Нехай в умовах наслідку 8 для деякого $p\in[1,\infty]$ функція f належить $L_p(R^N)$, а простір $\widetilde{A}$ є щільним в S в нормі $L_{q'}$, де $\frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{q}$, $q = 2p(1+p)^{-1}$.

Тоді для існування розв'язку задачі (2), (3) необхідно і досить, щоб знайшовся функціонал $a^\infty \in S'$, для якого $(\widetilde{a}^\infty)_S$ належить L_q, звуження на A має перетворення Фур'є класу $\mathrm{R}^0_{2,1/f}$, а звуження на Φ співпадає з a.

▸ Необхідність. Згідно з наслідком 1.1 існує F - розширення a^∞ функціоналу a, звуження якого на A має перетворення Фур'є класу $\mathrm{R}^0_{2,1/f}$. За означенням F - розширення, $\widetilde{a}^\infty$ також належить $\mathrm{R}^0_{2,1/f}$. Але якщо $f \in L_p$, то $\mathrm{R}^0_{2,1/f} \subset L_q$ (зауваження 2). Достатність. Позначимо b звуження a^∞ на A. За умовою, $(\widetilde{b}) \in \mathrm{R}^0_{2,1/f}$, причому із щільності $\widetilde{A}$ в S за нормою $L_{q'}$ та належності $\widetilde{a}^\infty$ простору L_q випливає, що $(\widetilde{b})_A = \widetilde{a}^\infty$, так що і $\widetilde{a}^\infty \in \mathrm{R}^0_{2,1/f}$, отже, наша задача має розв'язок . ◂

Зауважимо, що при $p = \infty$ вважається $q = 2$, і в цьому випадку, очевидно, наслідок 1.2 припускає більш просте формулювання:

10. *Наслідок.* Нехай в умовах наслідку 1.1 функція f є обмеженою в R^N, а простір A є щільним в S в нормі L_2. Тоді існування розв'язку задачі (2), (3) необхідно і досить, щоб знайшовся функціонал a^∞ типу функції класу L_2, звуження якого на A має перетворення Фур'є типу функції класу $\mathrm{R}^0_{2,1/f}$, а звуження на Φ співпадає з a.

Зауважимо також, що наслідок 9 може бути переформульований наступним чином.

11. *Наслідок.* В умовах наслідку 1.2 необхідною (достатньою) умовою існування розв'язку задачі (2),(3) є існування функціоналу $b \in A'$, для якого $(\widetilde{b})_A \in \mathrm{R}^0_{2,1/f}$, і такого, що $a(\varphi) = \lim\limits_{n\to\infty}\langle b,\varphi_n\rangle$ для довільного $\varphi \in \Phi$ та довільної (деякої) послідовності φ_n, для якої $\widetilde{\varphi}_n$ прямує до $\widetilde{\varphi}$ в $L_{q'}$.

▸ Необхідність. Згідно з наслідком 8 $a(\varphi) = <a^\infty, \varphi>$, де узагальнена функція $a^\infty \in S'$ є F - розширенням деякого функціоналу $b \in A'$, для якого $(\widetilde{b})_A \in \mathrm{R}^0_{2,1/f}$. За наших умов $\mathrm{R}^0_{2,1/f} \subset L_q$, $(\widetilde{b})_A = \widetilde{a}^\infty$, так що і $\widetilde{a}^\infty \in L_q$. Отже якщо $\widetilde{\varphi}_n$ довільна послідовність з $\widetilde{A}$, що прямує до $\widetilde{\varphi}$ в $L_{q'}$, то маємо

$$a(\varphi) = \langle a^\infty,\varphi\rangle = \langle \widetilde{a}^\infty,\widetilde{\varphi}\rangle = \lim_n\langle \widetilde{a}^\infty,\widetilde{\varphi}_n\rangle = \lim_n\langle \widetilde{b},\widetilde{\varphi}_n\rangle = \lim_n\langle b,\varphi_n\rangle.$$

Достатність. Оскільки $(\widetilde{b})_A \in \mathrm{R}^0_{2,1/f} \subset L_q$, то функціонал a^∞, рівний, за означенням, зворотному перетворенню функціонала $(\widetilde{b})_A$ як елемента в просторі L_q, є *F*-розширенням функціоналу *b*, причому якщо φ_n – деяка послідовність з *A*, для якої $\widetilde{\varphi}_n$ прямує до $\widetilde{\varphi}$ в L_q, то

$$\langle a^\infty, \varphi\rangle = \langle \widetilde{a}^\infty, \widetilde{\varphi}\rangle = \lim_n \langle \widetilde{a}^\infty, \widetilde{\varphi}_n\rangle = \lim_n \langle b, \varphi_n\rangle = a(\varphi). ◂$$

Для випадку $p = \infty$ маємо, очевидно, наступне:

12. *Наслідок*. В умовах наслідку 10 необхідною (достатньою) умовою існування розв'язку задачі (2),(3) є існування функціоналу $b \in A'$ типу функції з L_2, такого, що $(\widetilde{b})_A \in \mathrm{R}^0_{2,1/f}$, та $a(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \langle b, \varphi_n\rangle$ для довільного $\varphi \in \Phi$ та довільної (деякої) послідовності φ_n, що прямує до φ в L_2.

Висновки

Наведено умови існування розв'язку інтегрального рівняння (2) при виконанні умови (3) – задачі, до якої приводить значна кількість проблем математичної статистики, наприклад, проблеми розрізняння гіпотез і прогнозування. Одержані результати являються узагальненнями відповідних результатів робіт [2-5], що стосуються деяких часткових випадків задачі (2), (3), а також робіт автора [6-8].

ЛІТЕРАТУРА

1. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщённые функции, в.2. Пространства основных и обобщённых функций. М.: Физматгиз, 1958, 307 с.
2. Розанов Ю.А. Гауссовские бесконечномерные распределения. М.: "Наука", 1968, 136 с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов: в 3-х т..М.: "Наука", 1975 – т.1, 661с
4. Ядренко М.И. Спектральная теория случайных полей. Киев: «Вища школа», 1980, 207 с
5. Ядренко М.И. Об интегральных уравнениях статистики однородных и изотропных полей // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1975. - №12. – С. 159 -169
6. Краснитський С.М. Об условиях эквивалентности гауссовских мер, отвечающих однородным случайным полям с различными математическими ожиданиями // Доповіді НАН України. -1998. - №2. – С. 35-39
7. Краснитський С.М. Про умови еквівалентності та сингулярності ймовірнісних гауссівських мір, що відповідають однорідним полям із степеневим спектром.// Вісник київського університету, серія: фізико-математичні науки, в.1. - 2001. - С.33-43
8. Краснитський С.М. Про локальні умови еквівалентності ймовірнісних мір, що відповідають гауссівським однорідним полям із степеневим спектром (випадок різних середніх значень)// Вісник київського університету, серія: фізико-математичні науки, в.4. - 2001. - С.58-67.

Надійшла 06.07.2010