УДК 517.5

НАБЛИЖЕННЯ $\bar{\psi}$-ДИФЕРЕНЦІЙОВАНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЛІНІЙНИМИ СЕРЕДНІМИ ЇХ РЯДІВ ФУР'Є В МЕТРИЦІ ПРОСТОРУ L

Т.В. ГОРИСЛАВЕЦЬ, П.В. ЗАДЕРЕЙ

Київський національний університет технологій та дизайну

Отримані оцінки для точних верхніх граней відхилень функцій від лінійних середніх їх рядів Фур'є на класах $L_V^{\bar{\psi}}$, що визначаються обмеженнями на $\bar{\psi}$-похідну, введену О.І. Степанцем. Причому на послідовності $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$ накладаються умови менш жорсткі, ніж випуклість

Нехай 2π-періодична функція є сумовною і її ряд Фур'є має вигляд:

$$S[f]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k(f;x),$$

де $A_k(f;x)=a_k\cos kx+b_k\sin kx,\quad k=0,1,...$ Через $\bar{\psi}=(\psi_1,\psi_2)$ будемо позначати пару довільних числових послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, $k=\overline{1,\infty}$, яка задовольняє умову $\bar{\psi}^2(k)=\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)\neq 0,\ k\in\mathbb{N}$.

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_1(k)}{\bar{\psi}^2(k)}A_k(f;x)-\frac{\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)}\bar{A}_k(f;x)\right),$$

де $\bar{A}_k(f;x)=a_k\sin kx-b_k\cos kx$, є рядом Фур'є деякої функції $\varphi\in L$, то слідуючи О.І.Степанцю [1,2], функцію $\varphi(\cdot)$ назвемо $\bar{\psi}$-похідною функції f і будемо писати $\varphi(\cdot)=f^{\bar{\psi}}(\cdot)$.

Нехай $\Lambda=\left\{\lambda_k^{(n)}\right\},\ k,n=0,1,...,\ (\lambda_0^{(n)}=1,\forall n)$ - довільна прямокутна матриця чисел, яка ставить у відповідність кожній функції $f\in L$ послідовність рядів

$$U_n(f;x;\Lambda)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(n)}A_k(f,x),\quad n=1,2,...,$$

а пара $\bar{\psi}=(\psi_1,\psi_2)$ така, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\psi_1(k)\cos kx+\psi_2(k)\sin kx\right)$ є рядом Фур'є деякої функції $\Psi(x)$.

Позначимо: через $L_V^{\bar{\psi}}$ множину функцій $f(x)$, що представляються у вигляді

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi(t-x)\,d\varphi(t),$$

де $\varphi(\cdot)$ є функцією обмеженої варіації, її повна варіація не перевищує одиниці і $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)dt = 0$;

$\tau_k^{(n)} := (1-\lambda_k^{(n)})\psi_1(k)$, $\upsilon_k^{(n)} := (1-\lambda_k^{(n)})\psi_2(k)$.

Теорема. Нехай $\lim\limits_{k\to\infty}\psi_1(k) = \lim\limits_{k\to\infty}\psi_2(k) = 0$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(n)}(\psi_1(k)\cos kx + \psi_1(k)\sin kx)$ є рядом Фур'є деякої функції з L, а також збігаються ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|\upsilon_k^{(n)}\right|}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}k\left(\left|\Delta^2\tau_{k-1}^{(n)}\right| + \left|\Delta^2\upsilon_{k-1}^{(n)}\right|\right).$$

Тоді $\forall n,m \in \mathbb{N}$ справедлива оцінка рівномірна по m

$$\sup_{f\in L_\beta^\psi}\left\|f(x) - U_n(f;x;\Lambda)\right\|_L = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{k} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2m+1}^{\infty}\frac{\upsilon_k^{(n)}}{k} + O\Bigg(\left|\tau_m^{(n)}\right| + \left|\upsilon_m^{(n)}\right| +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{k(m-k)}{m}\left(\left|\Delta^2\tau_{k-1}^{(n)}\right| + \left|\Delta^2\upsilon_{k-1}^{(n)}\right|\right) + \sum_{k=1}^{m-1}k\left(\left|\Delta^2\tau_{m+k-1}^{(n)}\right| + \left|\Delta^2\upsilon_{m+k-1}^{(n)}\right|\right)\Bigg),$$

де $\xi_k = \xi\left(\upsilon_k^{(n)}, \sqrt{\left(\tau_{m-k}^{(n)} - \tau_{m+k}^{(n)}\right)^2 + \left(\upsilon_{m-k}^{(n)} - \upsilon_{m+k}^{(n)}\right)^2}\right)$.

Причому $\psi_1(k) = \frac{1}{k^r}\cos\beta\frac{\pi}{2}$, $\psi_2(k) = \frac{1}{k^r}\sin\beta\frac{\pi}{2}$ ця теорема встановлена в [3,4], а при $\psi_1(k) = \psi(k)\cos\beta_k\frac{\pi}{2}$, $\psi_2(k) = \psi(k)\sin\beta_k\frac{\pi}{2}$ - в [5].

ЛІТЕРАТУРА

1. Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.I. – 427 с.
2. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 340 с.
3. Стечкин С.Б., Теляковский С.А. О приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в метрике L. – Труды МИАН, 88, 1967, с. 20-29.
4. Теляковский С.А. Оценка нормы функцый через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории апроксимацій // Тр. Мат. Ин-та АН СССР. -- 1971. -- 109. -- с.65-97.
5. Задерей П.В. Об уклонении (ψ,β)-дифференцируемых периодических функций от линейных средних их рядов Фурье. // Препринт 482. Institute of mathematics Polish Academy of Sciences. XXXIV Semester in Banach center Theory of real functions. – 1990. – с.96-109.

Надійшла 05.07.2010