УДК 517.968.7

ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОБМЕЖЕННЯМИ

О. Б. Нестеренко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

We find consistency conditions for boundary-value problems for integral-differential equations with constraints and substantiate the use of the iteration method to solve such equations.

Установлены условия существования решений краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с ограничениями и приведено обоснование применения к ним итерационного метода.

1. Постановка задачі. В даній статті розглядається інтегро-диференціальне рівняння

$$(Ly)(x) = f(x) + \xi(x)\lambda + \int\limits_a^b H(x,t)\,(My)(t)dt \tag{1}$$

і ставиться задача знаходження такої функції $y \in W_2^m[a;b]$ та параметра $\lambda \in \mathbb{R}^n$, які задовольняють рівняння (1) майже скрізь, крайові умови

$$U(y) = \gamma \tag{2}$$

та обмеження

$$\int\limits_a^b S(x)y(x)dx = \alpha. \tag{3}$$

Якщо така пара $y(x)$, λ існує, задачу вважаємо сумісною.

В рівнянні (1) та формулах (2), (3) вважаємо

$$(Ly)(x) \equiv y^{(m)}(x) + p_1(x)y^{(m-1)}(x) + \ldots + p_m(x)y(x), \tag{4}$$

$$(My)(t) \equiv q_0(t)y^{(l)}(t) + \ldots + q_l(t)y(t),\ l < m, \tag{5}$$

коефіцієнти $\{p_m, q_l\} \subset L_2[a,b]$, $f \in L_2[a,b]$. $(1\times n)$-Матриця $\xi(x)$, $(n\times 1)$-матриця $S(x)$, елементи яких є лінійно незалежними функціями, сумовними з квадратом на відрізку $[a,b]$, стала $(m \times 1)$-матриця U, елементи якої мають вигляд

$$U_\nu(y) \equiv \sum_{s=1}^{m}(\alpha_{\nu s}y^{(s-1)}(a) + \beta_{\nu s}y^{(s-1)}(b)), \tag{6}$$

та $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ є заданими; $\xi(x)\lambda = \sum_{j=1}^{n} \xi_j(x)\lambda_j$; ядро $H(x,t)$ задовольняє умову $\int_a^b \int_a^b |H(x,t)|^2 \, dxdt < \infty$.

Важливими питаннями є дослідження сумісності задачі та розробка методів побудови розв'язків як точних, так і наближених. При розв'язанні цих питань використовується методика, розроблена в [1–5].

2. Умови сумісності. Для встановлення умов сумісності використаємо допоміжну задачу

$$(Ay)(x) = \xi(x)\lambda + Z(x), \; U(y) = \gamma, \tag{7}$$

$$\int_a^b S(x)y(x)dx = \alpha, \tag{8}$$

де

$$(Ay)\,(x) \equiv y^{(m)}(x) + c_1(x)y^{(m-1)}(x) + \ldots + c_m(x)y(x), \tag{9}$$

задана функція $Z \in L_2[a,b]$ і коефіцієнти $c_1(x), \ldots, c_m(x)$ є неперервними на відрізку $[a,b]$.

Лема 1. *Якщо однорідна задача*

$$(Ay)(x) = \xi(x)\lambda, \; U(y) = 0, \; \int_a^b S(x)y(x)dx = 0 \tag{10}$$

має лише тривіальний розв'язок, то існують такі вектор $\sigma \in \mathbb{R}^n$, функції $h(x)$, $G(x,t)$ та $(n \times 1)$-матриця $P(t)$, що єдиний розв'язок неоднорідної задачі (7), (8) зображується формулами

$$y(x) = h(x) + \int_a^b G(x,t)Z(t)dt, \tag{11}$$

$$\lambda = \sigma + \int_a^b P(t)Z(t)dt \tag{12}$$

і справджуються властивості

$$\int_a^b G(x,t)\xi(t)dt = 0, \; \int_a^b P(t)\xi(t)dt = -I, \tag{13}$$

де I — одинична матриця в $\mathbb{R}^n$.

Справді, припустимо, що коефіцієнти $c_1(x), \ldots, c_m(x)$ підібрано таким чином, що існує функція Гріна $\Gamma(x,t)$ задачі

$$(Ay)(x) = w(t), \; U(y) = \gamma, \tag{14}$$

і її можна побудувати в явному вигляді. За такого припущення єдиний розв'язок задачі (7) виражається формулою

$$y(x) = v(x) + \int\limits_a^b \Gamma(x,t)\left(\xi(t)\lambda + Z(t)\right)dt, \tag{15}$$

де $v(x)$ — розв'язок задачі (14) при $w(t) = 0$. Запишемо вираз (15) у вигляді

$$y(x) = v(x) + Y(x)\lambda + \int\limits_a^b \Gamma(x,t)Z(t)dt. \tag{16}$$

Тут

$$Y(x) = \int\limits_a^b \Gamma(x,t)\xi(t)dt. \tag{17}$$

Для визначення параметра λ підставимо співвідношення (16) в умову (3). В результаті отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\int\limits_a^b S(x)Y(x)dx\lambda = \alpha - \int\limits_a^b S(x)v(x)dx - \int\limits_a^b S(x)\int\limits_a^b \Gamma(x,t)Z(t)dtdx. \tag{18}$$

Якщо позначити

$$D = \int\limits_a^b S(x)Y(x)dx, \;\; \beta = \alpha - \int\limits_a^b S(x)v(x)dx, \tag{19}$$

$$B(t) = \int\limits_a^b S(x)\Gamma(x,t)dx, \tag{20}$$

то систему (18) можна записати таким чином:

$$D\lambda = \beta - \int\limits_a^b B(t)Z(t)dt. \tag{21}$$

Зауважимо, що неважко встановити за умови леми невиродженість матриці D. Розв'язавши систему (21), отримаємо

$$\lambda = D^{-1}\beta - \int\limits_a^b D^{-1}B(t)Z(t)dt. \tag{22}$$

Після введення позначень

$$P(t) = -D^{-1}B(t),\ \sigma = G^{-1}\beta, \tag{23}$$

співвідношення (22) набирає вигляду (12). Підставимо вираз (12) в (16), виконаємо нескладні перетворення і в результаті будемо мати

$$y(x) = v(x) + Y(x)\sigma + \int\limits_a^b \left(Y(x)P(t) + \Gamma(x,t)\right) Z(t)dt. \tag{24}$$

Для зручності введемо позначення

$$h(x) = v(x) + Y(x)\sigma, \tag{25}$$

$$G(x,t) = Y(x)P(t) + \Gamma(x,t) \tag{26}$$

і отримаємо формулу (11).

Тепер перевіримо чи справджуються властивості (13). Скористаємось позначеннями (23), (20), (17), (19) і спершу доведемо другу властивість:

$$\int\limits_a^b P(t)\xi(t)dt = -\int\limits_a^b D^{-1}\int\limits_a^b S(x)\Gamma(x,t)dx\xi(t)dt =$$

$$= -D^{-1}\int\limits_a^b S(x)\int\limits_a^b \Gamma(x,t)\xi(t)dtdx = -D^{-1}\int\limits_a^b S(x)Y(x)dx = -D^{-1}D = -I.$$

Легко перевірити і виконання першої властивості, скориставшись тими ж позначеннями, формулою (26) та другою властивістю. Маємо

$$\int\limits_a^b G(x,t)\xi(t)dt = \int\limits_a^b (\Gamma(x,t) + P(t)\cdot Y(x))\xi(t)dt =$$

$$= \int\limits_a^b \Gamma(x,t)\xi(t)dt + \int\limits_a^b Y(x)P(t)\xi(t)dt = Y(x) - Y(x) = 0.$$

Лему доведено.

Тепер можна звести задачу (1) – (3) до інтегрального рівняння. Для цього запишемо рівняння (1) у вигляді

$$y^{(m)}(x) + c_1(x)y^{(m-1)}(x) + \ldots + c_m(x)y(x) =$$

$$= y^{(m)}(x) + c_1(x)y^{(m-1)}(x) + \ldots + c_m(x)y(x) -$$

$$- y^{(m)}(x) + p_1(x)y^{(m-1)}(x) - \ldots - p_m(x)y(x) +$$

$$+ f(x) + \xi(x)\lambda + \int\limits_a^b H(x,t)\left(q_0(t)y^{(l)}(t) + \ldots + q_l(t)y(t)\right)dt,$$

або, ввівши позначення $r_k(x) = c_k(x) - p_k(x)$, $k = \overline{1,m}$,

$$Z(x) = f(x) + r_1(x)y^{(m-1)}(x) + \ldots + r_m(x)y(x) + \\ + \int\limits_a^b H(x,t)\left(q_0(t)y^{(l)}(t) + \ldots + q_l(t)y(t)\right)dt \qquad (27)$$

та врахувавши формулу (9), — у вигляді рівняння (7). Підставимо зображення (11) у праву частину виразу (27) та виконаємо нескладні перетворення. В результаті отримаємо

$$Z(x) = f(x) + r_1(x)h^{(m-1)}(x) + \ldots + r_m(x)h(x) +$$

$$+ \int\limits_a^b \left(r_1(t)\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}G(x,t) + \ldots + r_m(t)G(x,t)\right)Z(t)dt +$$

$$+ \int\limits_a^b H(x,t)(q_0(t)h^{(l)}(t) + \ldots + q_l(t)h(t))dt +$$

$$+ \int\limits_a^b \int\limits_a^b H(x,s)\left(q_0(s)\frac{\partial^l}{\partial s^l}G(s,t) + \ldots + q_l(s)G(s,t)\right)Z(t)dsdt. \qquad (28)$$

Якщо позначити

$$K(x,t) = r_1(t)\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}G(x,t) + \ldots + r_m(t)G(x,t) +$$

$$+ \int\limits_a^b H(x,s)\left(q_0(s)\frac{\partial^l}{\partial s^l}G(s,t) + \ldots + q_l(s)G(s,t)\right)ds, \qquad (29)$$

$$g(x) = f(x) + r_1(x)h^{(m-1)}(x) + \ldots + r_m(x)h(x) +$$

$$+ \int_a^b H(x,t)(q_0(t)h^{(l)}(t) + \ldots + q_l(t)h(t))dt, \tag{30}$$

то співвідношення (28) набере вигляду

$$Z(x) = g(x) + \int_a^b K(x,t)Z(t)dt. \tag{31}$$

Нескладними міркуваннями можна встановити твердження: задача (1) – (3) рівносильна інтегральному рівнянню (31). Рівносильність розуміється в такому сенсі: якщо $Z^*(x)$ — розв'язок рівняння (31), то функція $y^*(x)$ і параметр λ^*, які визначаються формулами

$$y^*(x) = h(x) + \int_a^b G(x,t)Z^*(t)dt, \tag{32}$$

$$\lambda^* = \sigma + \int_a^b P(t)Z^*(t)dt, \tag{33}$$

є розв'язком крайової задачі (1), (2) з обмеженням (3). І, навпаки, якщо $y^*(x)$ та λ^* — розв'язок задачі (1) – (3), то функція

$$Z^*(x) = (Ay^*)(x) - \xi(x)\lambda^* \tag{34}$$

є розв'язком рівняння (31).

Таким чином, справджується така теорема.

Теорема 1. *Якщо матриця D, що виражається формулою (19), є невиродженою, то задача (1) – (3) сумісна тоді і тільки тоді, коли існує розв'язок інтегрального рівняння (31).*

Приклад 1. Зведемо крайову задачу

$$y''(x) - \sqrt{x}y(x) = 9\lambda - 4x^3 + \int_0^1 (3\sqrt{xt} - 2)y(t)dt, \tag{35}$$

$$y(0) = 4,\ y(1) = 8, \tag{36}$$

з обмеженням

$$\int_0^1 (7 - 9x)y(x)dx = 10 \tag{37}$$

до інтегрального рівняння (31).

Для цього розглянемо допоміжну задачу

$$y''(x) = 9\lambda + Z(x),\ y(0) = 4,\ y(1) = 8, \tag{38}$$

$$\int_0^1 (7-9x)y(x)dx = 10 \tag{39}$$

і побудуємо її розв'язок. Розв'язавши задачу (38), отримаємо

$$y(x) = 4 + 4x + \frac{9}{2}\lambda(x^2 - x) + \int_0^1 \Gamma(x,t)Z(t)dt, \tag{40}$$

де

$$\Gamma(x,t) = \begin{cases} x(t-1), & x \le t, \\ t(x-1), & x \ge t. \end{cases} \tag{41}$$

Для визначення параметра λ підставимо (40) в умову (39). Тоді

$$\int_0^1 (7-9x)\left(4 + 4x + \frac{9}{2}\lambda(x^2 - x) + \int_0^1 \Gamma(x,t)Z(t)dt\right)dx = 10.$$

Виконавши нескладні обчислення з урахуванням (41), будемо мати

$$\frac{15}{8}\lambda = 2 + \int_0^1 \left(-2t + \frac{7}{2}t^2 - \frac{3}{2}t^3\right)Z(t)dt,$$

звідки

$$\lambda = \frac{16}{15} + \int_0^1 \left(-\frac{16}{15}t + \frac{28}{15}t^2 - \frac{4}{5}t^3\right)Z(t)dt. \tag{42}$$

Якщо в (42) позначити

$$\sigma = \frac{16}{15},\ P(t) = -\frac{16}{15}t + \frac{28}{15}t^2 - \frac{4}{5}t^3, \tag{43}$$

то отримаємо формулу (12).

Із співвідношень (40) та (42) випливає

$$y(x) = 4 - \frac{4}{5}x + \frac{24}{5}x^2 + \int_0^1 \left((x^2 - x)\left(-\frac{24}{5}t + \frac{42}{5}t^2 - \frac{18}{5}t^3\right) + \Gamma(x,t)\right)Z(t)dt. \tag{44}$$

Отже, якщо в (44) позначити

$$h(x) = 4 - \frac{4}{5}x + \frac{24}{5}x^2, \tag{45}$$

$$G(x,t) = (x^2 - x)\left(-\frac{24}{5}t + \frac{42}{5}t^2 - \frac{18}{5}t^3\right) + \Gamma(x,t), \tag{46}$$

то отримаємо формулу (11).

Зауважимо, що неважко безпосередніми обчисленнями з використанням формул (43), (45), (46) впевнитися в тому, що властивості (13) справджуються.

Оскільки формула (28) в розглядуваному випадку має вигляд

$$Z(x) = \sqrt{x}y(x) - 4x^3 + \int\limits_0^1 (3\sqrt{xt} - 2)y(t)dt, \tag{47}$$

то, підставивши зображення (44) з урахуванням позначень (45), (46), одержимо

$$Z(x) = \sqrt{x}h(x) + \sqrt{x}\int\limits_0^1 G(x,t)Z(t)dt - 4x^3 +$$

$$+ \int\limits_0^1 (3\sqrt{xt} - 2)h(t)dt + \int\limits_0^1 (3\sqrt{xs} - 2)\int\limits_0^1 G(s,t)Z(t)dsdt. \tag{48}$$

Якщо в (48) позначити

$$g(x) = \sqrt{x}h(x) - 4x^3 + \int\limits_0^1 (3\sqrt{xt} - 2)h(t)dt,$$

$$K(x,t) = \sqrt{x}G(x,t) + \int\limits_0^1 (3\sqrt{xs} - 2)G(s,t)ds,$$

то одержимо інтегральне рівняння (31).

Таким чином, задачу (35) – (37) зведено до інтегрального рівняння (48).

Безпосередніми обчисленнями можна переконатися, що інтегральне рівняння (47) має розв'язок

$$Z^*(x) = 15\sqrt{x} - \frac{72}{7}.$$

Отже, згідно з теоремою 1 задача (35) – (37) є сумісною і її розв'язок, який обчислюється за формулами (42), (44), має вигляд

$$y^*(x) = 4 + 4x^2\sqrt{x}, \qquad \lambda^* = \frac{8}{7}.$$

3. Ітераційний метод. Побудувати розв'язок крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь в явному вигляді можна лише у виняткових випадках. У зв'язку з цим важливе значення мають методи побудови наближених розв'язків. Серед різноманітних наближених методів широке застосування мають ітераційні.

Суть ітераційного методу стосовно задачі (1) – (3) полягає в тому, що, маючи наближення $(\lambda_{k-1}; y_{k-1}(x))$ до шуканого розв'язку, враховуючи зображення (27), виконуємо ітерацію

$$Z_k(x) = f(x) + r_1(x)y_{k-1}^{(m-1)}(x) + \ldots + r_m(x)y_{k-1}(x) +$$

$$+ \int_a^b H(x,t)\left(g_0(t)y_{k-1}^{(l)}(t) + \ldots + g_l(t)y_{k-1}(t)\right)dt \tag{49}$$

і наступне наближення $(\lambda_k; y_k(x))$ визначаємо з допоміжної задачі

$$(Ay)(x) = \xi(x)\lambda_k + Z_k(x),\ U(y_k) = \gamma, \tag{50}$$

$$\int_a^b S(x)y_k(x)dx = \alpha. \tag{51}$$

Початкове наближення знаходимо із задачі (50), (51) при $k = 0$ та заданій функції $Z_0(x)$.

Якщо матриця D, яка визначається формулою (19), є невиродженою, то послідовність наближених розв'язків за ітераційним методом будується однозначно.

Встановимо, що ітераційний метод (49) – (51) для задачі (1) – (3) зводиться до розв'язку інтегрального рівняння (31).

Справді, за даного припущення допоміжна задача (50), (51) має єдиний розв'язок, який, як встановлено в п. 2, визначається формулами

$$y_k(x) = h(x) + \int_a^b G(x,t)Z_k(t)dt, \tag{52}$$

$$\lambda_k = \sigma + \int_a^b P(t)Z_k(t)dt. \tag{53}$$

Виконаємо заміну в формулі (52) індексу k на $k-1$ і підставимо функцію $y_{k-1}(x)$ у співвідношення (49). В результаті, врахувавши позначення (29), (30), отримаємо

$$Z_k(x) = g(x) + \int_a^b K(x,t)Z_{k-1}(t)dt. \tag{54}$$

Таким чином, питання умов збіжності і оцінки похибки методу (49) – (51) зводиться до встановлення умов збіжності і оцінки похибки методу послідовних наближень стосовно інтегрального рівняння (31), які широко відомі в літературі. Зокрема, має місце така теорема.

Теорема 2. *Якщо спектральний радіус оператора* $(Ky)(x) = \int_a^b K(x,t)Z(t)dt$, $\rho(K) < 1$, *то існує єдиний розв'язок* $(\lambda^*; y^*(x))$ *задачі (1) – (3) і послідовність наближених розв'язків, побудованих за методом (49) – (51), збігається до цього розв'язку, тобто*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda^*, \quad \lim_{k\to\infty} y_k(x) = y^*(x).$$

Приклад 2. Застосуємо ітераційний метод (49) – (51) до задачі (35) – (37).

Згідно з цим методом за формулою (49) із урахуванням її явного вигляду (47) виконуємо ітерацію

$$Z(x) = \sqrt{x}y_{k-1}(x) - 4x^3 + \int\limits_0^1 (3\sqrt{xt} - 2)y_{k-1}(t)dt \tag{55}$$

і наступні наближення до шуканого розв'язку визначаємо з допоміжної задачі

$$y_k''(x) = 9\lambda_k + Z_k(x), \quad y_k(0) = 4, \ y_k(1) = 8, \tag{56}$$

$$\int\limits_0^1 (7 - 9x)y_k(x)dx = 10. \tag{57}$$

Нехай $Z_0(x) = 0$. Тоді згідно з (56), (57) початкове наближення визначається із задачі

$$y_0''(x) = 9\lambda_0, \quad y_0(0) = 4, \ y_0(1) = 8, \quad \int\limits_0^1 (7 - 9x)y_0(x)dx = 10,$$

розв'язком якої є

$$\lambda_0 = 1,066666, \quad y_0(x) = 4 - 0,8x + 4,8x^2.$$

Побудуємо перше наближення. Для цього за формулою (55) при $k = 1$ виконуємо ітерацію

$$Z_1(x) = -10,4 + 15,154286\sqrt{x} - 0,8x\sqrt{x} + 4,8x^2\sqrt{x} - 4x^3$$

та розв'язуємо задачу

$$y_1''(x) = 9\lambda_1 - 10,4 + 15,154286\sqrt{x} - 0,8x\sqrt{x} + 4,8x^2\sqrt{x} - 4x^3, \tag{58}$$

$$y_1(0) = 4, \ y_1(1) = 8, \tag{59}$$

$$\int_0^1 (7-9x)y_1(x)dx = 10. \tag{60}$$

Розв'язок задачі (58), (59)

$$y_1(x) = 4 + 5,145524x - 5,2x^2 +$$

$$+ \sqrt{x}(4,041143x - 0,091429x^3 + 0,304762x^4) - 0,2x^5 + 4,5\lambda_1(x^2 - x) \tag{61}$$

підставимо в умову (60) і після нескладних обчислень отримаємо рівняння

$$1,875\lambda_1 = 2,136527,$$

розв'язком якого є

$$\lambda_1 = 1,139481. \tag{62}$$

Підставимо значення λ_1 із (62) у (61) і отримаємо

$$y_1(x) = 4 + 0,017859x - 0,072330x^2 +$$

$$+ \sqrt{x}(4,041143x^2 - 0,091429x^3 + 0,304762x^4) - 0,2x^5.$$

Продовжуючи цей процес далі, отримуємо наступне наближення

$$\lambda_2 = 1,142953,$$

$$y_2(x) = 4 - 0,000508x - 0,002097x^2 + 0,002057x^5 - 0,003048x^6 +$$

$$+ 0,007256x^7 + \sqrt{x}(3,998801x^2 + 0,002041x^3 - 0,004593x^4 - 0,004102x^7).$$

Відхилення побудованих наближень від точного розв'язку

$$\lambda^* = \frac{8}{7} = 1,142857, \quad y^*(x) = 4 + 4x^2\sqrt{x}$$

задачі (35) – (37) видно з таблиці, в якій $\Delta_k(x) = y^*(x) - y_k(x)$, $\beta_k = \lambda^* - \lambda_k$.

x	$y^*(x)$	$y_0(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$\Delta_1(x)$	$\Delta_2(x)$
0	4	4	4	4	0	0
0,2	4,071554	4,032	4,072796	4,071516	-0,001242	0,000038
0,4	4,404771	4,448	4,403691	4,404802	0,001080	-0,000031
0,6	5,115419	5,248	5,111313	5,115544	0,004106	-0,000125
0,8	6,289733	6,432	6,285523	6,289859	0,004208	-0,000126
1	8	8	8	8	0	0
β_k	1,142857	1,066666	1,139480	1,142953	0,003377	-0,000096

1. *Лучка А. Ю.* Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 82–96.
2. *Лучка А. Ю.* Проекційно-ітеративний метод для диференціальних рівнянь з обмеженнями // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 4. — С. 465–488.
3. *Лучка А. Ю.* Методи розв'язування систем функціонально-диференціальних рівнянь з обмеженнями // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. — 2006. — Вип. 13. — С. 134–152.
4. *Лучка А. Ю., Кучерук Т. А.* Ітеративний метод побудови розв'язків лінійних рівнянь з обмеженнями // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 4. — С. 472–482.
5. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. — Киев: Наук. думка, 1993. — 288 с.

Одержано 28.12.2006