УДК 517.51

Т. В. Гориславець, П. В. Задерей, О. Б. Нестеренко
(Київ. нац. ун-т технологій та дизайну)

ПРО РЕГУЛЯРНІСТЬ ЛІНІЙНИХ МЕТОДІВ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ ТЕЙЛОРА

Necessary and sufficient conditions for regularity of linear summation methods for Taylor series which are defined by matrices that satisfy the conditions Boas-Telyakovskii are obtained.

Знайдені необхідні і достатні умови регулярності лінійних методів підсумовування рядів Тейлора, які визначаються матрицями, що задовольняють умови Боаса-Теляковського.

Нехай функція $f(x)$ є сумовною ($f \in L$) і її ряд Фур'є має вигляд

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(f;x),$$

де $A_k(f;x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad k = 1, 2, \ldots$

За допомогою трикутної матриці чисел $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $n, k = 0, 1, 2, \ldots$, $\lambda_k^{(n)} = 0$ при $k \geq n$, кожній функції f поставимо у відповідність тригонометричний поліном

$$U_n(f;x;\Lambda) = \lambda_0^{(n)} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)} A_k(f;x).$$

При цьому кажуть, що матриця Λ задає деякий лінійний метод $U_n(\Lambda)$ підсумовування рядів Фур'є, крім цього, має місце рівність

$$U_n(f;x;\Lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) K_n(t) dt,$$

де $K_n(t) = \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)} \cos kt$.

Метод підсумовування $U_n(\Lambda)$ називається регулярним в просторі неперервних функцій, якщо для довільної неперервної функції f і для всіх точок x (або рівномірно по x) виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f;x;\Lambda) = f(x). \tag{1}$$

У 1948 році С.М.Нікольський [1, с.260] сформульовав наступне твердження.

Для того, щоб для довільної неперервної функції $f(x)$ в довільній точці x виконувалось співвідношення (1) необхідно і достатньо виконання умов

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_k^{(n)} = 1$ для всіх $k = 0, 1, 2, \dots,$

б) існує стала $M > 0$, що $\int\limits_0^{2\pi} |K_n(t)|dt \le M < \infty.$

В цьому твердженні перевірка умов а), зазвичай, не викликає труднощів, а умова б) для багатьох методів перевіряється важко. Тому виникає питання про знаходження простіших, нехай і достатніх умов, при яких інтеграл $\int\limits_0^{2\pi} |K_n(t)|dt$ рівномірно обмежений. Надалі цю задачу будемо називати задачею С.М.Нікольського, оскільки ним [1, с.261] були отримані перші результати, які полягають в наступному: якщо числа $\lambda_k^{(n)}$ при кожному фіксованому n утворюють опуклу або вгнуту послідовність, тобто $\triangle^2\lambda_{k-1}^{(n)} \ge 0$, або $\triangle^2\lambda_{k-1}^{(n)} \le 0$, $\quad k = 1, \dots, n-1$, де $\triangle^2\lambda_{k-1}^{(n)} = \lambda_{k-1}^{(n)} - 2\lambda_k^{(n)} + \lambda_{k+1}^{(n)}$, то необхідними і достатніми умовами виконання співвідношення (1) є виконання а) і

$$|\lambda_k^{(n)}| \le M, \quad \left|\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k}\right| \le M.$$

Тут, і далі, через M , будемо позначати додатні абсолютні сталі, можливо, не однакові в різних формулах.

Пізніше Б.Надь [2] довів, що умова

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=n-k}^{n} \frac{n-k}{i} \right) |\triangle^2\lambda_k^{(n)}| \le M$$

достатня для того, щоб виконувалась умова б).

І.Карамата та М.Томіч [3] покращили оцінку Б.Надя. Ними було показано, що умови а) і

$$\sum_{k=0}^{n-2} q_k^{(n)} |\triangle^2 \lambda_k^{(n)}| \le M,$$

де $q_k^{(n)} = \begin{cases} (n-k)\ln\frac{n}{n-k}, & 0 \le k \le n-\sqrt{n}, \\ (n-k)\ln(n-k), & n-\sqrt{n} \le k \le n-2. \end{cases}$ є достатніми для виконання співвідношення (1).

В 1960 році О.В.Єфімов [4, с.745] узагальнив результати роботи [3]. Він показав, що для довільного тригонометричного полінома $K_n(t)$ справедлива нерівність

$$\int_0^{2\pi} |K_n(t)| dt \le M \left(|\lambda_0^{(n)}| + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n} |\triangle^2 \lambda_{k-1}^{(n)}| + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k} \right)$$

на основі якої, та із знайденої С.Сідоном [5] оцінки

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|a_k|}{n-k} \le M \int_0^{\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kt \right| dt,$$

ним було сформульовано наступне твердження.

Якщо послідовність $\{\lambda_k^{(n)}\}$ задовольняє умову

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n} |\triangle^2 \lambda_{k-1}^{(n)}| \le M,$$

то для того, щоб для будь-якої неперервної функції f в кожній точці x виконувалось співвідношення (1) необхідно і достатньо виконання умов а) і

в) існує стала $M > 0$, що

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k} \le M. \tag{2}$$

С.О.Теляковський [6, с.1227] замінив умову (2) менш жорсткою умовою і отримав наступний результат.

Якщо для матриці Λ рівномірно обмежена сума

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\triangle\lambda_k^{(n)}| + \sum_{k=2}^{n-2} \left| \sum_{i=1}^{q_{n,k}} \frac{\triangle\lambda_{k-i}^{(n)} - \triangle\lambda_{k+i}^{(n)}}{i} \right| \le M,$$

де $\triangle\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} - \lambda_{k+1}^{(n)}, \quad q_{n,k} = \min\left(\left[\frac{k}{2}\right], \left[\frac{n-k}{2}\right]\right)$, то для того, щоб для довільної неперервної функції f в кожній точці x виконувалось співвідношення (1) необхідно і достатньо виконання умов а) і в).

Слід відмітити, що умови регулярності при різноманітних припущеннях про члени $\lambda_k^{(n)}$ трикутної матриці одержували Г.О.Фомін [7], Л.В.Тайков [8], Р.М.Тригуб [9], А.А.Захаров [10] і інші.

Нехай функція $f(z)$ задана і аналітична в крузі $D = \{z : |z| < 1\}$ і неперервна при $|z| = 1$. Множину таких функцій позначимо через $A(\overline{D})$.

Нехай $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\},\ n, k = 0, 1, 2, \ldots,\ \lambda_k^{(n)} = 0$ при $k \ge n$ — трикутна матриця чисел.

Кожній функції $f \in A(\overline{D})$ поставимо у відповідність поліном

$$U_n(f; z; \Lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} a_k z^k.$$

Метод підсумовування $U_n(\Lambda)$ називається регулярним в просторі аналітичних функцій, якщо для довільної функції $f \in A(\overline{D})$ і для довільної точки $z \in \overline{D}$ виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f; z; \Lambda) = f(z). \tag{3}$$

У 1962 році Л.В.Тайков [11, с.627] отримав наступне твердження.

Для того, щоб метод підсумовування $U_n(\Lambda)$ був регулярним в просторі аналітичних функцій необхідно і достатньо виконання умов а) і

г) існує число $M > 0$ і такий розклад $\lambda_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} + \beta_k^{(n)}$, що

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_k^{(n)} \cos kx + \beta_k^{(n)} \sin kx \right) \right| \le M. \tag{4}$$

Також, ним був наведений приклад матриці Λ, яка визначає метод $U_n(\Lambda)$, що є регулярним в просторі аналітичних функцій і нерегулярним на множині неперервних функцій.

В даній роботі розв'язується задача в постановці С.М.Нікольського, тобто, умова (4) заміняється умовою більш зручною для перевірки.

Теорема. *Якщо існує число M і розклад $\lambda_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} + \beta_k^{(n)}$ такі, що*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(|\triangle\alpha_k^{(n)}| + |\triangle\beta_k^{(n)}| \right) + \sum_{k=2}^{n-2} \left(\left| \sum_{i=1}^{q_{n,k}} \frac{\triangle\alpha_{k-i}^{(n)} - \triangle\alpha_{k+i}^{(n)}}{i} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \sum_{i=1}^{q_{n,k}} \frac{\triangle\beta_{k-i}^{(n)} - \triangle\beta_{k+i}^{(n)}}{i} \right| \right) \le M, \tag{5}$$

то для того, щоб метод підсумовування $U_n(\Lambda)$ був регулярним в просторі аналітичних функцій необхідно і достатньо виконання умов а) і

д)

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} (|\beta_k^{(n)}| + |\alpha_{n-k}^{(n)}| + |\beta_{n-k}^{(n)}|) \le M. \tag{6}$$

Доведення. С.О.Теляковським [12, с.73] встановлена слідуюча рівномірна відносно $m = 0, 1, 2, \dots$ оцінка

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| dx - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{\xi_k}{k} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\pi} \sum_{k=2m+1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} \right| \le M H_m,$$

де

$$\xi_k = \xi(b_k, \sqrt{(a_{m-k} - a_{m+k})^2 + (b_{m-k} - b_{m+k})^2}),$$

$$\xi(t, u) = \begin{cases} \frac{\pi|t|}{2}, & |u| \le |t|, \\ |t| \arcsin(\frac{|t|}{|u|}) + \sqrt{u^2 - t^2}, & |t| < |u|. \end{cases}$$

$$H_m = \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| + \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta b_k| +$$

$$+ \sum_{i=2}^{m-2} \left| \sum_{k=1}^{q_{i,m}} \frac{\Delta a_{i-k} - \Delta a_{i+k}}{k} \right| + \sum_{i=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{[i/2]} \frac{\Delta a_{m+i-k} - \Delta a_{m+i+k}}{k} \right| +$$

$$+ \sum_{i=2}^{m-2} \left| \sum_{k=1}^{q_{i,m}} \frac{\Delta b_{i-k} - \Delta b_{i+k}}{k} \right| + \sum_{i=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{[i/2]} \frac{\Delta b_{m+i-k} - \Delta b_{m+i+k}}{k} \right|,$$

$$q_{i,m} = \min\left(\left[\frac{i}{2}\right], \left[\frac{m-i}{2}\right] \right).$$

Поклавши $m = n$,

$$a_k = \begin{cases} \alpha_k^{(n)}, & 0 \le k \le n-1, \\ 0, & k > n-1. \end{cases},$$

$$b_k = \begin{cases} \beta_k^{(n)}, & 0 \le k \le n-1, \\ 0, & k > n-1. \end{cases},$$

одержимо (див. [12], наслідок 1)

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{\alpha_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k^{(n)} \cos kx + \beta_k^{(n)} \sin kx) \right| dx - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \xi_k \right| \le$$

$$\le M \left(\sum_{k=0}^{n-1} (|\triangle \alpha_k^{(n)}| + |\triangle \beta_k^{(n)}|) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=2}^{n-2} \left(\left| \sum_{i=1}^{q_{n,k}} \frac{\triangle \alpha_{k-i}^{(n)} - \triangle \alpha_{k+i}^{(n)}}{i} \right| + \left| \sum_{i=1}^{q_{n,k}} \frac{\triangle \beta_{k-i}^{(n)} - \triangle \beta_{k+i}^{(n)}}{i} \right| \right) \right), \tag{7}$$

де $\xi_k = \xi \left(\beta_k^{(n)}, \sqrt{(\alpha_{n-k}^{(n)})^2 + (\beta_{n-k}^{(n)})^2} \right)$.

Крім того, в роботі [12, с.72] встановлені наступні нерівності

$$\xi(t,u) \leq \frac{\pi}{2}|t| + |u|,$$
$$\xi(t,u) \geq \frac{\pi}{2}|t|,$$
$$\xi(t,u) \geq |u|.$$

Тобто,

$$M_1 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(|\beta_k^{(n)}| + |\alpha_{n-k}^{(n)}| + |\beta_{n-k}^{(n)}|) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\xi_k \leq$$

$$\leq M_2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(|\beta_k^{(n)}| + |\alpha_{n-k}^{(n)}| + |\beta_{n-k}^{(n)}|).$$

Нерівність (7) перепишемо у вигляді

$$M_1 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(|\beta_k^{(n)}| + |\alpha_{n-k}^{(n)}| + |\beta_{n-k}^{(n)}|) - MT_n(\alpha,\beta) \leq I \leq$$

$$\leq M_2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(|\beta_k^{(n)}| + |\alpha_{n-k}^{(n)}| + |\beta_{n-k}^{(n)}|) + MT_n(\alpha,\beta), \tag{8}$$

де $I = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{\alpha_0^{(n)}}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1}(\alpha_k^{(n)} \cos kx + \beta_k^{(n)} \sin kx)\right| dx$,

$$T_n(\alpha,\beta) = \sum_{k=0}^{n-1}(|\triangle\alpha_k^{(n)}| + |\triangle\beta_k^{(n)}|) + \sum_{k=2}^{n-2}\left(\left|\sum_{i=1}^{q_{n,k}} \frac{\triangle\alpha_{k-i}^{(n)} - \triangle\alpha_{k+i}^{(n)}}{i}\right| + \right.$$

$$\left. + \left|\sum_{i=1}^{q_{n,k}} \frac{\triangle\beta_{k-i}^{(n)} - \triangle\beta_{k+i}^{(n)}}{i}\right|\right).$$

Необхідність. Нехай виконується умова (4). Тоді з лівої частини нерівності (8) слідує виконання умови (6). Що й доводить необхідність умови (6).

Достатність умови (6) слідує з правої частини нерівності (8).

Наслідок. *Якщо існує число* M *і розклад* $\lambda_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} + \beta_k^{(n)}$ *такі, що*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n} \left(|\triangle^2 \alpha_{k-1}^{(n)}| + |\triangle^2 \beta_{k-1}^{(n)}| \right) \leq M,$$

то для того, щоб метод підсумовування $U_n(\Lambda)$ *був регулярним в просторі аналітичних функцій необхідно і достатньо виконання умов а) і д).*

При доведенні використовується оцінка встановлена С.О.Теляковським [6, с.1233]

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\triangle \lambda_k^{(n)}| + \sum_{k=2}^{n-2} \left| \sum_{i=1}^{q_{n,k}} \frac{\triangle \lambda_{k-i}^{(n)} - \triangle \lambda_{k+i}^{(n)}}{i} \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n} |\triangle^2 \lambda_{k-1}^{(n)}|.$$

1. *Никольский С.М.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР, серия матем. – 1948. – 12. – С. 259–278.
2. *Sz.–Nagy B.* Méthodes de sommation des séries de Fourier.I // Acta Scient. Math. Szeged. – 12. – 1950. – Pars B. – C. 204–210.
3. *Karamata J., Tomic M.* Sur la sommation des séries de Fourier // Глассрпске Акад. наука. – 206. – 1953. – №5. – С. 89–126.
4. *Ефимов А.В.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР, серия матем. – 1960. – 24. – С. 743–757.
5. *Sidon S.* Über Fourier–Koeffizienten, J. of the London Mathem. Sosiety. – 13. – 1938. – №3. – С. 181–183.
6. *Теляковский С.А.* Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приближение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. – 1964. – 28. – С. 1209–1236.
7. *Фомин Г.А.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Матем. сб. – 65(107):1. – 1964. – С. 144–152.
8. *Тайков Л.В.* Новые признаки регулярности треугольных методов суммирования // Матем. заметки. – 1 – 1967. – №5 – С. 541–547.
9. *Тригуб Р.М.* Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость рядов Фурье // Изв. АН СССР, серия матем. – 32. – 1968. – №1. – С. 24–49.
10. *Захаров А.А.* О нормах тригонометрических полиномов // Сиб. матем. журн. – 9. – 1968. – №1. – С. 67–76.
11. *Тайков Л.В.* О методах суммирования рядов Тейлора // Изв. АН СССР, серия матем. – 1962. – 26. – С. 625–630.

12. *Теляковский С.А.* Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории апроксимаций // Тр. Мат. Ин–та АН СССР. – 1971. – 109. – С. 65–97.