

УДК 004.519.6:517

[https://doi.org/10.52058/2786-6025-2024-12\(40\)-1420-1432](https://doi.org/10.52058/2786-6025-2024-12(40)-1420-1432)

Резанова Вікторія Георгіївна кандидат технічних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук, Київський національний університет технологій та дизайну, м. Київ, <https://orcid.org/0000-0003-4630-2701>

Чупринка Наталія Вікторівна кандидат технічних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук, Київський національний університет технологій та дизайну, м. Київ, <https://orcid.org/0000-0002-8952-7567>

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ: ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ПРОГРАМУВАННЯ

Анотація. В дослідженнях технічного, технологічного, економічного напрямків часто доводиться створювати і аналізувати математичні моделі реальних явищ та процесів. Наукові задачі легкої промисловості не становлять тут винятку. Різноманітні питання прикладної механіки, теорії машин і механізмів легкої промисловості, хімії волокон та полімерів, матеріалознавства, економіки галузей, побудови розкрийних схем, організації технологічних процесів та прогнозування характеристик їх вихідних продуктів — далеко не повний перелік тих областей досліджень, які потребують якісного математичного моделювання для одержання вагомих і надійних результатів.

Важливу роль в історії математики, в розвитку її ідей і методів зіграли рівняння. Вони знаходять найширше розповсюдження при вирішенні теоретичних і прикладних завдань САПР устаткування і технологічних процесів легкої і текстильної промисловості. Великі труднощі виникають при розв'язанні алгебраїчних і трансцендентних рівнянь, у яких визначити явні вирази для коренів не представляється можливим. Крім того, в деяких випадках рівняння містить коефіцієнти, які відомі тільки приблизно, і, відповідно, сама задача про точне визначення коренів рівняння втрачає зміст. Тому важливого значення набувають способи наближеного знаходження коренів рівняння і оцінки степеня їх точності.

В роботі проаналізовано і порівняно два методи розв'язання трансцендентних рівнянь — метод половинного ділення (дихотомії) та метод хорд. Наведено результати програмного розв'язання на прикладах: графічне відділення та аналітичне уточнення кореня.

Розв'язання таких рівнянь є важливим, оскільки до них зводиться велика кількість реальних задач із різних областей знань: економіка, системи управління, машинне навчання, обробка зображень, розв'язання задач оптимізації, у різних галузях техніки — там, де рівняння описують складні системи.

Таким чином, у науковому моделюванні часто використовуються складні математичні моделі, які не мають аналітичного рішення. Чисельні методи розв'язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь є незамінними інструментами в математиці, науці, інженерії та різних інших сферах.

Ключові слова: чисельні методи, трансцендентне рівняння, програмна реалізація, відділення коренів, уточнення коренів, метод дихотомії, метод хорд.

Rezanova Viktoriia Georhiivna PhD in Engineering, Associate Professor of the Department of Computer Science, Kyiv National University of Technologies and Design, Kyiv, <https://orcid.org/0000-0003-4630-2701>

Chuprynka Natalia Viktorivna PhD in Engineering, Associate Professor, Department of Computer Science, Kyiv National University of Technologies and Design, Kyiv, <https://orcid.org/0000-0002-8952-7567>

NUMERICAL METHODS OF SOLVING TRANSCENDENT EQUATIONS: RESEARCH AND PROGRAMMING

Abstract. In the research of technical, technological, economic directions, it is often necessary to create and analyze mathematical models of real phenomena and processes. Scientific tasks of light industry are no exception here. Various issues of applied mechanics, theory of machines and mechanisms of light industry, chemistry of fibers and polymers, materials science, economy of industries, construction of cutting diagrams, organization of technological processes and forecasting of the characteristics of their initial products are far from a complete list of those areas of research that require high-quality mathematical modeling for obtaining significant and reliable results.

Equations played an important role in the history of mathematics, in the development of its ideas and methods. They find the widest distribution when solving theoretical and applied tasks of CAD equipment and technological processes of light and textile industry. Great difficulties arise when solving algebraic and transcendental equations, in which it is not possible to determine explicit expressions for the roots. In addition, in some cases, the equation contains coefficients that are known only approximately, and, accordingly, the very task of accurately determining the roots of the equation loses its meaning. Therefore, the methods of approximate finding of the roots of the equation and estimation of the degree of their accuracy become important.

The paper analyzes and compares two methods of solving transcendental equations - the method of half division (dichotomy) and the method of chords. The results of the software solution are presented using examples: graphic separation and analytical refinement of the root.

Solving such equations is important, because a large number of real problems from various fields of knowledge are reduced to them: economics, control systems, machine learning, image processing, solving optimization problems, in various fields of technology - where equations describe complex systems.

Thus, complex mathematical models that do not have an analytical solution are often used in scientific modeling. Numerical methods for solving algebraic and transcendental equations are indispensable tools in mathematics, science, engineering, and various other fields.

Keywords: numerical methods, transcendental equation, software implementation, root separation, root refinement, dichotomy method, chord method.

Постановка проблеми. Мета математичного моделювання може бути різною. Часто такою метою буває передбачення (прогнозування) поведінки тих чи інших характеристик досліджуваних об'єктів. Типи застосовуваних математичних моделей є вельми різноманітними. Звичайно, використання конкретного типу моделі залежить від розв'язуваної задачі і властивостей об'єкту дослідження. Але попри всю відзначену різноманітність об'єктів дослідження і їх математичних моделей, можна вказати деякі математичні об'єкти або структури, які найчастіше фігурують в якості математичних моделей явищ, процесів, систем або в якості компонентів таких моделей.

Велике значення мають математичні моделі у вигляді диференціальних рівнянь, які є одним з головних знарядь дослідження найрізноманітніших явищ і процесів. Лінійні алгебраїчні рівняння зовсім не обов'язково виступають як апроксимуючий засіб. У багатьох ситуаціях вони дають безпосередній опис досліджуваного явища. Звичайно, не завжди вдається дати адекватний опис досліджуваного процесу за допомогою лінійних рівнянь або їх систем. Нелінійні зв'язки між фрагментами матеріальних систем, різними змінними, що впливають на хід процесу тощо є скоріш правилом, ніж виключенням. Тож при математичному моделюванні досліджуваного явища досить часто доводиться мати справу нелінійними рівняннями (алгебраїчними або трансцендентними) або їх системами, і досліднику треба мати в розпорядженні методи розв'язання таких співвідношень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Сучасний розвиток науки та обчислювальної техніки характеризується все більш зростаючим рівнем використання комп'ютерних моделей як для дослідження поведінки явищ та процесів, що оточують людину, так і для розв'язання практичних задач, пов'язаних з управлінням та прогнозуванням. [1]

Як відомо, для розв'язання прикладної задачі потрібно використовувати математичну модель. Під математичною моделлю фізичної системи, об'єкта або процесу розуміють сукупність математичних співвідношень (формул, рівнянь, логічних виразів), які визначають характеристики стану і властивості

системи, об'єкта і процесу та їх функціонування залежно від параметрів їх компонентів, початкових умов і часу. Тобто, математична модель описує функціональну залежність між вхідними змінними і змінюваними вихідними змінними. Ця функціональна залежність, що відображається математичною моделлю, може бути явною, чи неявною, тобто може бути зображена або як просте алгебраїчне співвідношення, або як велика за розміром сумісна система диференціально- алгебраїчних рівнянь. Сучасні комп'ютери дозволяють у багатьох випадках відмовитися від макетування проєктованих виробів, замінивши його математичним моделюванням (обчислювальним експериментом), що дуже важливо, коли натурне макетування або дуже складне, або взагалі неможливе. Для кожної математичної моделі формулюється математична задача. При цьому відповідно до виду математичної моделі розрізняють такі базові типи математичних задач: розв'язання системи лінійних рівнянь; розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь; апроксимація масиву даних або складної функції більш простими функціями; чисельне інтегрування і диференціювання; розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь; розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних; розв'язання інтегральних рівнянь. Складні математичні моделі великої розмірності вимагають застосування чисельних методів. Чисельні методи – це математичний інструментарій, за допомогою якого математична задача формулюється у вигляді, зручному для розв'язання на комп'ютері. В цьому випадку кажуть про перетворення математичної задачі в обчислювальну [2].

Багато реальних задач зводяться до розв'язання нелінійних (трансцендентних) рівнянь. Цьому приділяється велика увага у класичних роботах [8-10], так і в сучасних наукових статтях. Трансцендентні рівняння виникають у кожній галузі науки та техніки. Мета автора [5] — навчити мистецтву знаходження коренів одного алгебраїчного рівняння або пари таких рівнянь. У книзі, зокрема, описано вдосконалений методи розв'язання таких рівнянь.

Книга [6] надає інформацію, що стосується алгебраїчних і трансцендентних рівнянь. Викладається нетрадиційна теорія наближеного розв'язування рівнянь, розглядаються наближені методи обчислення коренів алгебраїчних рівнянь, обговорюються методи отримання більш точних коренів, які є важливими для практичного застосування.

У статтях [1, 3, 4] запропоновані нові підходи та схеми для розв'язування нелінійних трансцендентних рівнянь. Робота [2] присвячена порівняльному аналізу алгоритмів розв'язування трансцендентних рівнянь. Вона містить алгоритми та методи для перевірки точності, кількості ітерацій і помилок для розв'язання тригонометричних, логарифмічних і експоненціальних рівнянь. Наводяться конкретні приклади, щоб проілюструвати ефективність алгоритмів.

Отже, чисельний аналіз, зокрема – розв'язання трансцендентних рівнянь - є предметом надзвичайного інтересу для математиків і програмістів, і тема дослідження є актуальною.

Мета статті. аналіз та порівняння двох методів чисельного розв'язання трансцендентних рівнянь – методу половинного ділення та методу хорд. – та їх програмна реалізація та дослідження ефективності.

Виклад основного матеріалу. Нехай маємо алгебраїчне (чи трансцендентне) рівняння

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

де функція $f(x)$ визначена і неперервна в деякому скінченному або нескінченному інтервалі $a < x < b$.

Будемо вважати, що рівняння (1) має лише ізольовані корені. Наближене знаходження ізольованих дійсних коренів рівняння (1) звичайно складається з двох етапів:

- 1) *відділення коренів*, тобто встановлення можливо вузьких проміжків $[\alpha, \beta]$, в яких міститься один і тільки один корінь рівняння (1);
- 2) *уточнення наближених коренів*, тобто доведення їх до заданого степеня точності.

Важливим є наступне твердження: Якщо неперервна функція $f(x)$ приймає значення різних знаків на кінцях відрізка $[\alpha, \beta]$, тобто $f(\alpha)f(\beta) < 0$, то в середині цього відрізка міститься принаймні один корінь рівняння $f(x) = 0$, тобто знайдеться хоча б одне число $\xi \in (\alpha, \beta)$ таке, що $f(\xi) = 0$ (рис. 1).

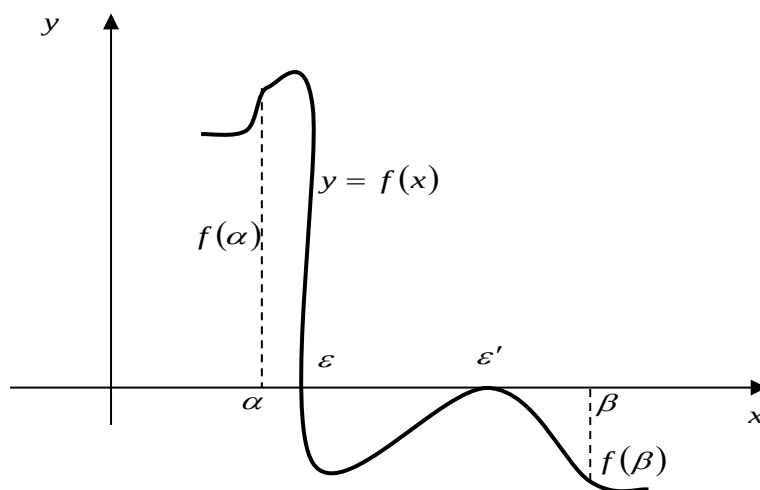


Рис. 1 На відрізку $[\alpha, \beta]$ існує принаймні один корінь рівняння $f(x) = 0$

Відомо, що корінь ξ буде єдиним, якщо похідна $f'(x)$ існує і зберігає постійний знак всередині інтервала (α, β) (рис.2).

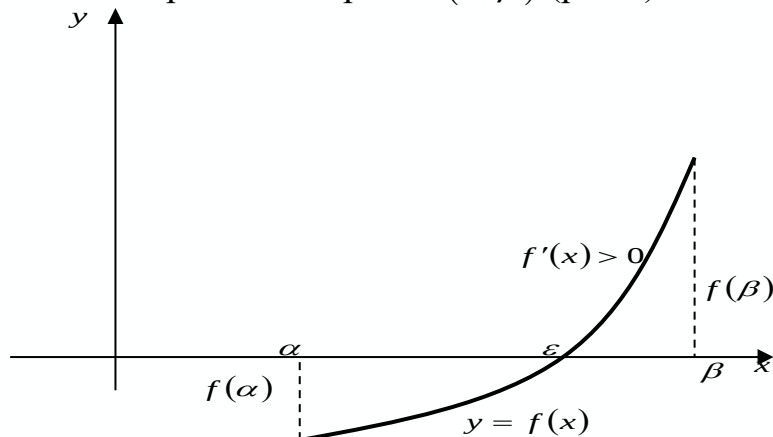


Рис. 2 На відрізку $[\alpha, \beta]$ існує єдиний корінь рівняння $f(x) = 0$.

Графічне розв'язання рівнянь

Дійсний корінь рівняння (1) наближено можна визначити як абсциси точок перетину графіка функцій $y = f(x)$ з віссю Ox (рис.2). Якщо рівняння (1) не має близьких між собою коренів, то цим способом його корені легко відділяються.

Приклад 1. Графічно відділити корені рівняння $f(x) = -x^2 + \cos(x) + 1 = 0$

Здійснимо відділення коренів за допомогою спеціально розробленої програми. Інтерфейс програми наведено на рис. 3.

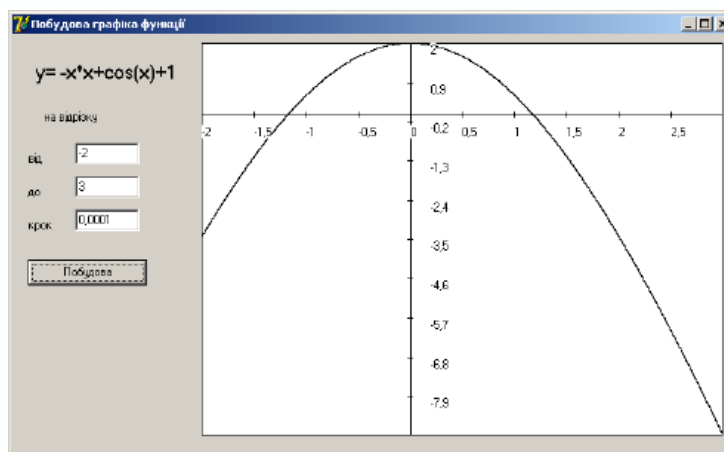


Рис. 3 Інтерфейс програми для графічного відділення коренів трансцендентних рівнянь.

Методи уточнення коренів

Метод половинного поділу

Нехай дано рівняння (1), де функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$ та $f(a)f(b) < 0$.

Для уточнення кореня рівняння (1), що належить відрізку $[a, b]$, ділимо цей відрізок навпіл. Якщо $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то $\xi = \frac{a+b}{2}$ є коренем рівняння.

Якщо $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ то вибираємо ту з половин $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ або $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ на кінцях якої функція $f(x)$ має протилежні знаки. Новій зменшеній відрізок $[a_1, b_1]$ знову ділимо навпіл та проводимо аналогічний розгляд і т.д. В результаті отримаємо на якомусь етапі або точний корінь рівняння (1), або безкінечну послідовність вкладних один в одного відрізків $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ таких, що

$$f(a_n)f(b_n) < 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

та

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a) \quad (3)$$

Так як ліві кінці $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ утворюють монотонну неспадаючу обмежену послідовність, а праві кінці $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ - монотонну незростаючу обмежену послідовність, то в силу рівності (3) існує загальна границя $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

Переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$ в нерівності (2), в силу неперервності функції $f(x)$ отримаємо $[f(\xi)]^2 \leq 0$. Звідси $f(\xi) = 0$, ξ є коренем рівняння (1), при цьому $0 \leq \xi - a_n \leq \frac{1}{2^n}(b - a)$.

Метод половинного ділення практично використовувати для грубого знаходження кореня рівняння, так як при збільшенні точності значно збільшиться об'єм роботи з підрахунками.

Зазначимо, що метод половинного ділення легко реалізується на комп'ютерах.

Приклад 2. Методом половинного ділення уточнити корінь рівняння

$f(x) = -x^2 + \cos(x) + 1 = 0$, що знаходиться на відрізку $[1; 1.5]$ з точністю $\varepsilon = 0.0001$.

Здійснимо уточнення кореня за допомогою спеціально розробленої програми. Результати роботи програми виводяться в файл, який наведено на рис. 4.

Файл Правка Формат Вид Справка

Уточнення кореня трансцендентного рівняння методом половинного поділу

Момент зупинки $|b-a| < 0.0001$

	a	f(a)	b	f(b)	c	f(c)	b-a
0	1.00000	0.54030	1.50000	-1.17926	1.25000	-0.24718	0.50000
1	1.00000	0.54030	1.25000	-0.24718	1.12500	-0.16555	0.25000
2	1.12500	0.16515	1.25000	-0.24718	1.18750	-0.03618	0.12500
3	1.12500	0.16515	1.18750	-0.03618	1.15625	0.06586	0.06250
4	1.15625	0.06586	1.18750	-0.03618	1.17188	0.01513	0.03125
5	1.17188	0.01513	1.18750	-0.03618	1.17969	-0.01045	0.01563
6	1.17188	0.01513	1.17969	-0.01045	1.17578	0.00236	0.00781
7	1.17578	0.00236	1.17969	-0.01045	1.17773	-0.00404	0.00391
8	1.17578	0.00236	1.17773	-0.00404	1.17676	-0.00084	0.00195
9	1.17578	0.00236	1.17676	-0.00084	1.17627	0.00076	0.00098
10	1.17627	0.00076	1.17676	-0.00084	1.17651	-0.00004	0.00049
11	1.17627	0.00076	1.17651	-0.00004	1.17639	0.00036	0.00024
12	1.17639	0.00036	1.17651	-0.00004	1.17645	0.00016	0.00012
13	1.17645	0.00000	1.17651	0.00000	1.17648	0.00000	0.00006

Уточнений корінь: $x=1.17648$

Рис. 4 Файл результатів роботи програми – уточнення коренів трансцендентного рівняння методом половинного поділу

Спосіб пропорційних частин (метод хорд)

Розглянемо ще один спосіб знаходження кореня ξ рівняння $f(x)=0$, що знаходиться на заданому відрізку $[a, b]$ такому що $f(a)f(b) < 0$.

Нехай для визначеності $f(a) < 0$ та $f(b) > 0$. Тоді, замість того щоб ділити відрізок $[a, b]$ навпіл, більш практично розділити його у відношенні $-f(a):f(b)$. Це дає нам наближене значення кореня

$$x_1 = a + h_1$$

$$\text{де } h_1 = \frac{-f(a)}{-f(a) + f(b)}(b - a) = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

Далі, застосовуючи цей метод до того з відрізків $[a, x_1]$ або $[x_1, b]$, на кінцях якого функція $f(x)$ має протилежні знаки, отримаємо друге наближення кореня x_2 та т.д.

Геометрично спосіб пропорційних частин еквівалентний заміні кривої $y = f(x)$ хордою, яка проходить через точки $A[a, f(a)]$ та $B[b, f(b)]$ (рис. 5).

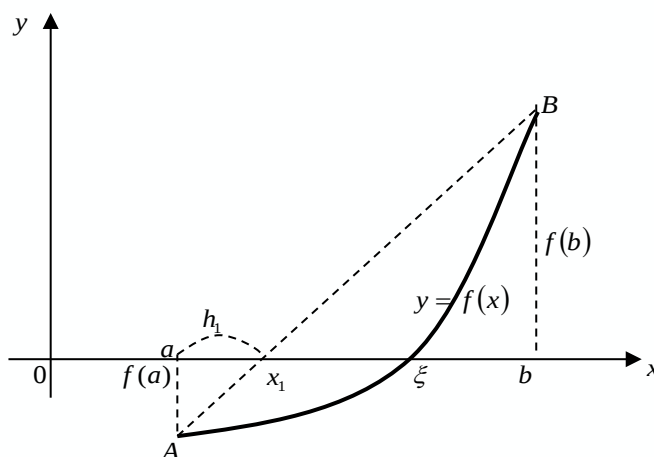


Рис. 5 Геометрична інтерпретація методу хорд.

Для того, щоб довести збіжність процесу, припустимо, що корінь відділено та друга похідна $f''(x)$ зберігає постійний знак на відрізку $[a, b]$.

Нехай для визначеності $f''(x) > 0$ при $a \leq x \leq b$ (випадок $f''(x) < 0$ зводиться до нашого, якщо записати рівняння у вигляді $-f(x) = 0$). Тоді крива $y = f(x)$ буде вгнута і з цього витікає, що вона розташована нижче своєї хорди AB . Можливі два випадки: 1) $f(a) > 0$ (Рис. 6, а); 2) $f(a) < 0$ (Рис. 6, б)

В першому випадку кінець a нерухомий та послідовне наближення:

$$x_0 = b;$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

утворюють обмежену монотонно спадаючу послідовність, при цьому $a < \xi < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_1 < x_0$

В другому випадку нерухомий кінець b , а послідовне наближення:

$$x_0 = a;$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

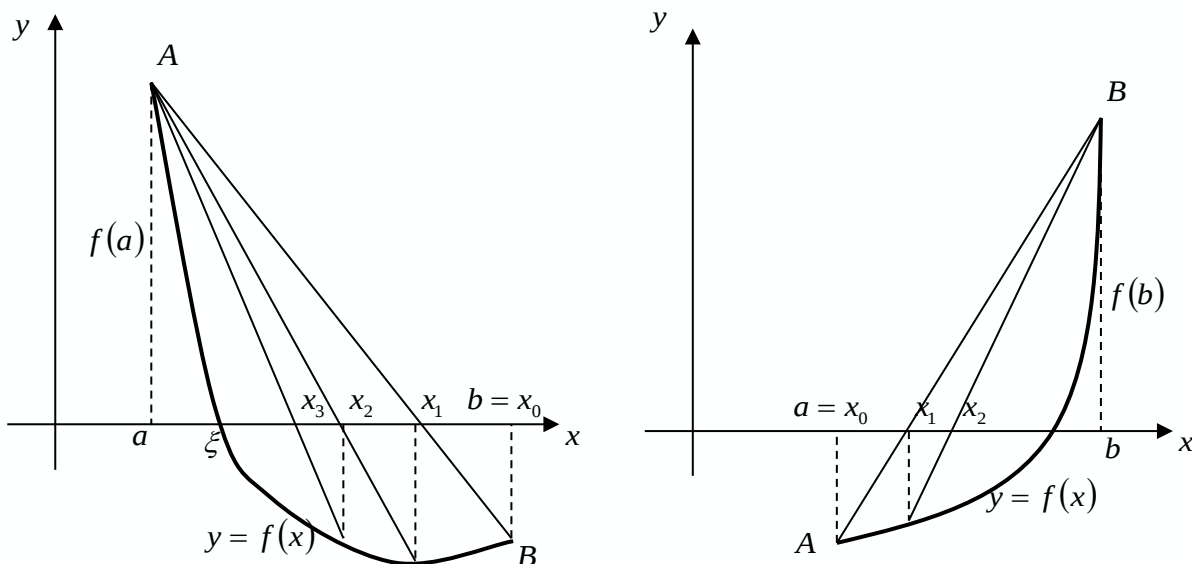


Рис. 6 Метод хорд: а) нерухомий лівий кінець відрізка; б) нерухомий правий кінець відрізка

створюють обмежену монотонно зростаючу послідовність, при цьому:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < \xi < b$$

Узагальнюючи ці результати, робимо висновок: 1) нерухомий той кінець, для якого знак функції $f(x)$ співпадає зі знаком її другої похідної $f''(x)$; 2) послідовні наближення x_n лежать по ту сторону кореня ξ , де функція $f(x)$ має знак, протилежний знаку її другої похідної $f''(x)$. В обох випадках кожне наступне наближення x_{n+1} ближче до кореня ξ , ніж попереднє x_n . Нехай $\bar{\xi} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ($a < \bar{\xi} < b$) (границя існує, так як послідовність $\{x_n\}$ обмежена та монотонна). Переходячи до границі в рівності (4), для першого випадку маємо:

$$\bar{\xi} = \bar{\xi} - \frac{f(\bar{\xi})}{f(\bar{\xi}) - f(a)}(\bar{\xi} - a)$$

звідки $f(\bar{\xi}) = 0$. Так як за припущенням рівняння $f(x) = 0$ має єдиний корінь ξ на інтервалі (a, b) , тоді $\bar{\xi} = \xi$, що й потрібно було довести.

За таким же принципом переходячи до границі в рівності (5), доведемо, що $\bar{\xi} = \xi$ для другого випадку.

Для оцінки точності наближення скористаємося формулою

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}$$

де $|f'(x)| \geq m_1$ при $a \leq x \leq b$.

Приклад. Методом хорд уточнити корінь рівняння

$$f(x) = -x^2 + \cos(x) + 1 = 0,$$

що знаходиться на відрізку $[1; 1.5]$ з точністю $\varepsilon = 0.0001$.

Розв'язання

Здійснимо уточнення кореня за допомогою спеціально розробленої програми. Результати роботи програми виводяться в файл, який наведено на рис. 7.

hord - Блокнот				
Файл Правка Формат Вид Справка				
Уточнення кореня трансцендентного рівняння методом хорд				
Момент зупинки $ f(x_{n+1}) < \text{delta}$				
delta=0.00028				
	x_n	$f(x_n)$	x_{n+1}	$ f(x_{n+1}) $
0	1.00000	0.54030	1.15710	0.06310
1	1.15710	0.06310	1.17452	0.00649
2	1.17452	0.00649	1.17630	0.00066
3	1.17630	0.00066	1.17648	0.00007
Уточнений корінь $x=1.17648$				

Рис. 7 Файл результатів роботи програми – уточнення коренів трансцендентного рівняння методом хорд

Бачимо, що метод хорд збігається набагато швидше, ніж метод половинного ділення, і отже є більш ефективним.

Висновки. В роботі проаналізовано і порівняно два методи розв'язання трансцендентних рівнянь – метод половинного ділення (дихотомії) та метод хорд. Наведено результати програмного розв'язання на прикладах: графічне відділення та аналітичне уточнення кореня.

Розв'язання таких рівнянь є важливим, оскільки до них зводиться велика кількість реальних задач із різних областей знань [7]:

- Економіка. Фінансове моделювання: задачі, пов'язані із процентні ставки, моделі ціноутворення, моделі, пов'язані з оцінкою інвестицій тощо.
- Системи управління: для обчислення областей стабільності та визначення та аналізу стійкості та поведінки систем керування.
- Машинне навчання: в деяких алгоритмах машинного навчання, зокрема в оптимізаційних задачах для знаходження оптимальних параметрів у таких моделях, як логістична регресія.
- Обробка зображень: для пошуку коренів неявних функцій, що описують геометричні фігури або елементи зображення.
- Розв'язання задач оптимізації, які включають ітераційні обчислення
- У різних галузях техніки існують рівняння, що представляють складні системи

Таким чином, у науковому моделюванні часто використовуються чисельні методи складні математичні моделі, які не мають аналітичного рішення. Методи алгебраїчних і трансцендентних рівнянь є незамінними інструментами в математиці, науці, інженерії та різні інші сфери. Ці методи дозволяють вирішувати широкий спектр проблем, які включають математичні рівняння, алгебраїчні функції, здатність знаходити рішення і є важливою для розуміння зв'язків між змінними, оптимізації систем і прийняття обґрунтованих рішень.

Література:

1. Задачин В. М. Конюшенко І. Г. Чисельні методи. Харків: ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. - 180 с. http://kist.ntu.edu.ua/textPhD/CHM_Zadachin.pdf
2. Волонтир Л.О., Зелінська О.В., Потапова Н.А., Чіков І.А. Чисельні методи / Вінницький національний аграрний університет. – Вінниця: ВНАУ, 2020 – 322 с. <http://repository.vsau.org/card.php?lang=uk&id=27703>
3. Kenneth A. Ross Elementary Analysis: The Theory of Calculus, 2nd ed. // Springer, 2013. <https://www.amazon.com/Elementary-Analysis-Calculus-Undergraduate-Mathematics/dp/1461462703>
4. Gary N. Felder, Kenny M. Felder Mathematical Methods in Engineering and Physics // John Wiley & Sons, 2015 - 832 p. <https://www.amazon.com/Mathematical-Methods-Engineering-Physics-Felder/dp/1118449606>

5. Richard W. Hamming Numerical Methods for Scientists and Engineers // Courier Corporation, 1986. - 721 p. <https://www.amazon.com/Numerical-Methods-Scientists-Engineers-Mathematics/dp/0486652416>
6. John P. Boyd Solving Transcendental Equations: The Chebyshev Polynomial Proxy and Other Numerical Rootfinders, Perturbation Series // Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014. - 480 p. <https://www.amazon.com/Solving-Transcendental-Equations-Rootfinders-Perturbation/dp/1611973511>
7. V. L. Zaguskin Handbook of Numerical Methods for the Solution of Algebraic and Transcendental Equations // Elsevier, 2014. <https://shop.elsevier.com/books/handbook-of-numerical-methods-for-the-solution-of-algebraic-and-transcendental-equations/zaguskin/978-1-4832-0064-4>
8. G. Candelario, A. Cordero, J. R. Torregrosa, M. P. Vassileva Solving Nonlinear Transcendental Equations by Iterative Methods with Conformable Derivatives: A General Approach // *Mathematics* 2023, 11(11), 2568; <https://doi.org/10.3390/math11112568>
9. Akgül A., Grow D. Fractal Newton Methods. *Mathematics*, 2023, 11, 2277. <https://doi.org/10.3390/math11102277>
10. Candelario, G.; Cordero, A.; Torregrosa, J.R.; Vassileva, M.P. Generalized conformable fractional Newton-type method for solving nonlinear systems. *Numer. Algorithms*, 2023, Volume 93, pages 1171–1208. <https://link.springer.com/article/10.1007/s11075-022-01463-z>
11. Arti Bhatia, Nirupma Bhatti Study of Algorithms to Calculate Real Root of Transcendental Equations // International Journal for Multidisciplinary Research, Volume 6, Issue 1, 2024. DOI:10.36948/ijfmr.2024.v06i01.11975
12. Madhu N R., Shashidhar S N., Meenakshi H., Reshma S R. Algebraic and Transcendental Equation and It's Applications // International Journal of Advanced Research in Science, Volume 3, Issue 2, 2023 <https://ijarsct.co.in/Paper12754.pdf>

References:

1. Zadachyn V. M. Koniushenko I. G. Chyselni metody [Numerical methods] Kharkiv: HNEU im. S. Kuznetsia, 2014. - 180 p. [in Ukrainian]. http://kist.ntu.edu.ua/textPhD/CHM_Zadachin.pdf
2. Volontyr L.O, Zelunska O.V., Potapova N.A., Chikov I.A. Chyselni metody [Numerical methods] / Vinnytskiy natsionalnyi agrarnyi universytet. – Vinnytsia: VNAU, 2020 – 322 p. [in Ukrainian]. <http://repository.vsau.org/card.php?lang=uk&id=27703>
3. Kenneth A. Ross Elementary Analysis: The Theory of Calculus, 2nd ed. // Springer, 2013. <https://www.amazon.com/Elementary-Analysis-Calculus-Undergraduate-Mathematics/dp/1461462703>
4. Gary N. Felder, Kenny M. Felder Mathematical Methods in Engineering and Physics // John Wiley & Sons, 2015 - 832 p. <https://www.amazon.com/Mathematical-Methods-Engineering-Physics-Felder/dp/1118449606>
5. Richard W. Hamming Numerical Methods for Scientists and Engineers // Courier Corporation, 1986. - 721 p. <https://www.amazon.com/Numerical-Methods-Scientists-Engineers-Mathematics/dp/0486652416>
6. John P. Boyd Solving Transcendental Equations: The Chebyshev Polynomial Proxy and Other Numerical Rootfinders, Perturbation Series // Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014. - 480 p. <https://www.amazon.com/Solving-Transcendental-Equations-Rootfinders-Perturbation/dp/1611973511>
7. V. L. Zaguskin Handbook of Numerical Methods for the Solution of Algebraic and Transcendental Equations // Elsevier, 2014. <https://shop.elsevier.com/books/handbook-of-numerical-methods-for-the-solution-of-algebraic-and-transcendental-equations/zaguskin/978-1-4832-0064-4>

8. G. Candelario, A. Cordero, J. R. Torregrosa, M. P. Vassileva Solving Nonlinear Transcendental Equations by Iterative Methods with Conformable Derivatives: A General Approach // *Mathematics* 2023, 11(11), 2568; <https://doi.org/10.3390/math11112568>

9. Akgül A., Grow D. Fractal Newton Methods. *Mathematics*, 2023, 11, 2277. <https://doi.org/10.3390/math11102277>

10. Candelario, G., Cordero, A., Torregrosa, J.R., Vassileva, M.P. Generalized conformable fractional Newton-type method for solving nonlinear systems. *Numer. Algorithms*, 2023, Volume 93, pages 1171–1208.

<https://link.springer.com/article/10.1007/s11075-022-01463-z>

11. Arti Bhatia, Nirupma Bhatti Study of Algorithms to Calculate Real Root of Transcendental Equations // *International Journal for Multidisciplinary Research*, Volume 6, Issue 1, 2024. DOI: 10.36948/ijfmr.2024.v06i01.11975

12. Madhu N R., Shashidhar S N., Meenakshi H., Reshma S R. Algebraic and Transcendental Equation and It's Applications // *International Journal of Advanced Research in Science*, Volume 3, Issue 2, 2023 <https://ijarsct.co.in/Paper12754.pdf>