УДК 517.9

СЛАБКО ЗБУРЕНІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ НА ЧАСОВІЙ ШКАЛІ

І. А. Бондар

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: bondar.i@imath.kiev.ua; holovatska.iv@gmail.com

О. Б. Нестеренко

Київ. нац. ун-т технологій та дизайну
вул. вул. Немировича-Данченка, 2, Київ, 01011, Україна
e-mail: Nesterenkoolha@gmail.com

О. П. Страх

Сумський держ. пед. ун-т ім. А. С. Макаренка
вул. Роменська, 87, Суми, 40002, Україна
e-mail: strah_o@ukr.net

We obtain bifurcation conditions of solutions of weakly perturbed systems of linear integro-dynamic equations on the segment $[a, b]$ of any time scales from the point $\varepsilon = 0$. We propose a convergent iterative procedure for finding solutions in the form of a part of the Laurent series.

Одержано умови біфуркації з точки $\varepsilon = 0$ розв'язків слабкозбурених систем лінійних інтегро-динамічних рівнянь на відрізку $[a, b]$ довільної часової шкали. Запропоновано збіжну ітераційну процедуру знаходження розв'язків у вигляді частини ряду Лорана.

1. Постановка задачі. Побудова математичних моделей процесів реального світу приводить до розгляду крайових задач для різних операторних рівнянь. Вивченню умов існування розв'язків систем лінійних динамічних та інтегро-динамічних рівнянь і побудові методів відшукання розв'язків таких задач присвячено роботи [1 – 8].

Розглянемо систему інтегро-динамічних рівнянь зі збуренням на деякій часовій шкалі $\mathbb{T}$ вигляду

$$x^{\Delta}(t) - \Phi(t) \int_a^b \left[A(s)x(s) + B(s)x^{\Delta}(s)\right] \Delta s =$$

$$= f(t) + \varepsilon \int_a^b \left[K(t,s)x(s) + K_1(t,s)x^{\Delta}(s)\right] \Delta s. \qquad (1)$$

Припускаємо, що $A(t)$, $B(t)$ — $(m \times n)$-, $\Phi(t)$ — $(n \times m)$-, $f(t)$ — $(n \times 1)$-, $K(t, s)$, $K_1(t, s)$ — $(n \times n)$-вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a, b)_{\mathbb{T}}$ Δ-інтегровних із квадратом на проміжку $[a, b)_{\mathbb{T}} := [a, b) \cap \mathbb{T}$ функцій; стовпчики матриці $\Phi(t)$ лінійно незалежні на $[a, b)_{\mathbb{T}}$, тобто $\operatorname{rank} \Phi(t) = m$.

Припускаємо також, що породжуюча система

$$x^{\Delta}(t)-\Phi(t)\int_a^b\left[A(s)x(s)+B(s)x^{\Delta}(s)\right]\Delta s=f(t), \tag{2}$$

яку отримуємо з (1) при $\varepsilon=0$, не розв'язна, тобто одержаний у роботі [7] критерій розв'язності неоднорідної системи (2) не виконується. Аналогічно до [7] уведемо відповідні позначення:

$$\tilde{b}=\int_a^b\Big[A(s)\tilde{f}(s)+B(s)f(s)\Big]\Delta s,\quad \tilde{f}(t)=\int_a^t f(s)\,\Delta s,$$

$$\Psi(t)=\int_a^t\Phi(s)\,\Delta s,\quad \Psi_0(t)=\left[\Psi(t),I_n\right],$$

I_n — одинична матриця порядку n,

$$D=\left[I_m-\int_a^b[A(s)\Psi(s)+B(s)\Phi(s)]\,\Delta s,-\int_a^b A(s)\,\Delta s\right]$$

— відома $(m\times(m+n))$-вимірна матриця, P_D — ортопроектор на ядро матриці D, $P_{D_{r_1}}$ — $((m+n)\times r_1)$-вимірна матриця, яка складається з повної системи r_1 лінійно незалежних стовпчиків матриці-ортопроектора P_D, $r_1=m+n-n_1>0$, $d_1=m-n_1$, $n_1=\operatorname{rank}D$, $X_{r_1}(t)=\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}$, $X_{r_1}(t)$ — $(n\times r_1)$-вимірна матриця, P_{D^*} — ортопроектор на ядро матриці D^*, $P_{D^*_{d_1}}$ — $(d_1\times m)$-вимірна матриця, яка складається з повної системи d_1 лінійно незалежних рядків матриці-проектора P_{D^*}, D^+ — псевдообернена (за Муром – Пенроузом) [3] до D матриця.

Теорема 1. *Нехай* $\operatorname{rank}D=n_1$. *Система інтегро-динамічних рівнянь (2) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли функція* $f(t)$ *задовольняє умову*

$$P_{D^*_{d_1}}\tilde{b}=0.$$

При виконанні цієї умови система (2) має r_1*-параметричну сім'ю розв'язків*

$$x(t)=X_{r_1}(t)c_{r_1}+F(t),\qquad F(t)=\tilde{f}(t)+\Psi_0(t)D^+\tilde{b}.$$

Отже, припустимо, що умова $P_{D^*_{d_1}}\tilde{b}=0$ виконується.

Виникає питання, чи можна за допомогою лінійного збурення звести систему (2) до розв'язної? А якщо можна, то якими повинні бути складові збурених матриць $K(t,s)$, $K_1(t,s)$ в інтегро-динамічній системі (1), щоб вона стала розв'язною при довільних неоднорідностях $f(t)\in L_2[a,b)_{\mathbb{T}}$?

2. Основний результат. Розв'язок системи (1) шукаємо у класі вектор-функцій $x(t)$ таких, що

$$x=x(t,\varepsilon)\colon x(\cdot,\varepsilon)\in D_2[a,b)_{\mathbb{T}},\quad x^{\Delta}(\cdot,\varepsilon)\in L_2[a,b)_{\mathbb{T}},\quad x(t,\cdot)\in C(0,\varepsilon_0].$$

Буде показано, що існування розв'язку задачі (1) суттєво залежить від $(d_1 \times r_1)$-вимірної матриці

$$B_0 := P_{D^*_{d_1}} \left(\int\limits_a^b \left[A(s) \int\limits_a^s \int\limits_a^b \left[K(\tau, s) X_{r_1}(s) + K_1(\tau, s) x^{\Delta}_{r_1}(s) \right] \Delta s \Delta \tau + \right. \right.$$

$$\left. \left. + B(s) \int\limits_a^b \left[K(s, \tau) X_{r_1}(\tau) + K_1(s, \tau) x^{\Delta}_{r_1}(\tau) \right] \Delta \tau \right] \Delta s \right).$$

Теорема 2. *Нехай* $\operatorname{rank} B_0 = n_2 < d_1$ *і система інтегро-динамічних рівнянь (1) зі збуренням задовольняє наведені вище умови так, що породжуюча* $(\varepsilon = 0)$ *система (2) не розв'язна. Тоді, якщо виконується умова*

$$P_{B^*_0} P_{D^*_{d_1}} = 0, \tag{3}$$

то система (1) має ρ*-параметричну* $\rho = n + m - n_1 - n_2$ *сім'ю розв'язків у вигляді збіжного ряду при фіксованому* $\varepsilon \in (0; \varepsilon_*]$*:*

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t, c_\rho) \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho, \quad \forall t \in [a, b)_{\mathbb{T}}. \tag{4}$$

Доведення. Для доведення даного факту застосуємо метод Вішика – Люстерніка [9], який дозволяє знайти ефективні коефіцієнти умови виникнення розв'язків системи (1) для довільного $t \in [a, b)_{\mathbb{T}}$ у вигляді частини ряду Лорана по степенях малого параметра ε:

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t, c_\rho) = \frac{x_{-1}(t, c_\rho)}{\varepsilon} + x_0(t, c_\rho) + \varepsilon x_1(t, c_\rho) + \varepsilon^2 x_2(t, c_\rho) + \ldots . \tag{5}$$

Підставимо ряд (5) у систему (1) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε.

При ε^{-1} для знаходження $x_{-1}(t)$ отримаємо однорідну систему

$$x^{\Delta}_{-1}(t) - \Phi(t) \int\limits_a^b \left[A(s) x_{-1}(s) + B(s) x^{\Delta}_{-1}(s) \right] \Delta s = 0.$$

Як і у випадку системи інтегро-диференціальних рівнянь [3], одержана однорідна інтегродинамічна система завжди має r_1 лінійно незалежних розв'язків $x_{-1}(t, c_{-1}) = X_{r_1}(t) c_{-1}$, де r_1-вимірний вектор-стовпчик $c_{-1} \in \mathbb{R}^{r_1}$ визначається з умови розв'язності рівняння відносно $x_0(t)$.

При ε^0, де

$$f_{-1}(t) = f(t) + \int\limits_a^b \left[K(t, s) x_{-1}(s, c_{-1}) + K_1(t, s) x^{\Delta}_{-1}(s, c_{-1}) \right] \Delta s,$$

прийдемо до визначення $x_0(t)$:

$$x^{\Delta}_0(t) - \Phi(t) \int\limits_a^b \left[A(s) x_0(s) + B(s) x^{\Delta}_0(s) \right] \Delta s = f_{-1}(t). \tag{6}$$

Умова розв'язності системи (6) набуває вигляду $P_{D^*_{d_1}}\tilde{b}_{-1} = 0$, де

$$\tilde{b}_{-1} = \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{f}_{-1}(s) + B(s)f_{-1}(s)\Big]\Delta s, \qquad \tilde{f}_{-1}(t) = \int\limits_a^t f_{-1}(s)\,\Delta s.$$

Підставимо значення $\tilde{b}_{-1}$ у вказану умову розв'язності:

$$P_{D^*_{d_1}}\Bigg(\int\limits_a^b \Bigg[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b \big[K(\tau,s)X_{r_1}(s) + K_1(\tau,s)x^{\Delta}_{r_1}(s)\big]\Delta s\,\Delta\tau +$$

$$+B(s)\int\limits_a^b \big[K(s,\tau)X_{r_1}(\tau) + K_1(s,\tau)x^{\Delta}_{r_1}(\tau)\big]\Delta\tau\Bigg]\Delta s\Bigg)c_{-1} =$$

$$= -P_{D^*_{d_1}}\int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{f}(s) + B(s)f(s)\Big]\Delta s.$$

Звідси отримуємо алгебраїчну систему відносно $c_{-1} \in \mathbb{R}^{r_1}$:

$$B_0 c_{-1} = -P_{D^*_{d_1}}\tilde{b}, \tag{7}$$

де

$$B_0 := P_{D^*_{d_1}}\Bigg(\int\limits_a^b \Bigg[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b \big[K(\tau,s)X_{r_1}(s) + K_1(\tau,s)x^{\Delta}_{r_1}(s)\big]\Delta s\,\Delta\tau +$$

$$+B(s)\int\limits_a^b \big[K(s,\tau)X_{r_1}(\tau) + K_1(s,\tau)x^{\Delta}_{r_1}(\tau)\big]\Delta\tau\Bigg]\Delta s\Bigg).$$

Для того щоб система (7) була розв'язною для довільних неоднорідностей $f(t) \in L_2[a;b)_{\mathbb{T}}$, достатньо, щоб виконувалася умова $P_{B_0^*}P_{D^*_{d_1}} = 0$. Тоді

$$\bar{c}_{-1} := -B_0^+ P_{D^*_{d_1}}\tilde{b}, \qquad c_{-1} = \bar{c}_{-1} + P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho,$$

де B_0^+ — псевдообернена до B_0 матриця. У цьому випадку система відносно $x_{-1}(t)$ має ρ-параметричну сім'ю розв'язків

$$\bar{x}_{-1}(t,\bar{c}_{-1}) := X_{r_1}(t)\bar{c}_{-1}, \qquad x_{-1}(t,c_\rho) = \bar{x}_{-1}(t,\bar{c}_{-1}) + X_{r_1}(t)P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Оскільки $\operatorname{rank} P_{B_0} = r_1 - \operatorname{rank} B_0 = r_1 - n_2 = n - m - n_1 - n_2 = \rho$, то P_{B_0} ($(r_1 \times r_1)$-вимірну матрицю) замінимо на P_ρ — $(r_1 \times \rho)$-вимірну матрицю, яка складається з ρ лінійно незалежних стовпців матриці P_{B_0}, де P_{B_0} — ортопроектор, який проектує простір $\mathbb{R}^{r_1}$ на $\ker B_0$. Система (6) при умові $P_{B_0^*}P_{D^*_{d_1}} = 0$ має r_1-параметричну сім'ю розв'язків

$x_0(t,c_0) = X_{r_1}(t)c_0 + F_{-1}(t)$, де c_0 — r_1-вимірний вектор констант, який буде однозначно визначений на наступному кроці з умови розв'язності системи для $x_1(t)$, $F_{-1}(t)$ — частинний розв'язок, $F_{-1}(t) = \tilde{f}_{-1}(t) + \Psi_0(t)B_0^+\tilde{b}$. Методом підстановки одержуємо

$$\bar{F}_{-1}(t) := \tilde{f}(t) + \left(\int\limits_a^t \int\limits_a^b \left[K(\tau,s)X_{r_1}(s) + K_1(\tau,s)x_{r_1}^{\Delta}(s)\right]\Delta s\, \Delta\tau\right)\bar{c}_{-1} + \Psi_0(t)B_0^+\tilde{b},$$

$$L(t) := \int\limits_a^b \left[K(t,s)X_{r_1}(s) + K_1(t,s)x_{r_1}^{\Delta}(s)\right]\Delta s,$$

$$F_{-1}(t) = \bar{F}_{-1}(t) + L(t)P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

При ε^1 для знаходження $x_1(t)$ маємо лінійну неоднорідну систему

$$x_1^{\Delta}(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b \left[A(s)x_1(s) + B(s)x_1^{\Delta}(s)\right]\Delta s =$$

$$= \int\limits_a^b \left[K(t,s)x_0(s) + K_1(t,s)x_0^{\Delta}(s)\right]\Delta s.$$

Нехай

$$f_0(t) := \int\limits_a^b \left[K(t,s)x_0(s) + K_1(t,s)x_0^{\Delta}(s)\right]\Delta s,$$

тоді система набуває вигляду

$$x_1^{\Delta}(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b \left[A(s)x_1(s) + B(s)x_1^{\Delta}(s)\right]\Delta s = f_0(t). \tag{8}$$

З умови розв'язності рівняння (8)

$$P_{D_{d_1}^*}\tilde{b_0} = 0, \tag{9}$$

де

$$\tilde{b_0} = \int\limits_a^b [A(s)\tilde{f}_0(s) + B(s)f_0(s)]\,\Delta s, \qquad \tilde{f}_0(t) = \int\limits_a^t f_0(s)\,\Delta s,$$

отримуємо

$$P_{D_{d_1}^*}\tilde{b_0} = P_{D_{d_1}^*}\left(\int\limits_a^b \left[A(s)\int\limits_a^s \int\limits_a^b \left[K(\tau,s)x_0(s) + K_1(\tau,s)x_0^{\Delta}(s)\right]\Delta s\,\Delta\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left. + B(s)\int\limits_a^b \left[K(s,\tau)x_0(\tau) + K_1(s,\tau)x_0^{\Delta}(\tau)\right]\Delta\tau\right]\Delta s\right) = 0.$$

Враховуючи, що

$$x_0(t,c_0)=X_{r_1}(t)c_0+F_{-1}(t),$$

$$M_{-1}(t):=\int\limits_a^b\big[K(t,s)\bar F_{-1}(s)+K_1(t,s)\bar F^{\Delta}_{-1}(s)\big]\Delta s,\qquad \tilde M_{-1}(t)=\int\limits_a^t M_{-1}(s)\,\Delta s,$$

$$\tilde L(t)=\int\limits_a^t L(s)\,\Delta s,$$

$$\tilde{b_0}=\left(\int\limits_a^b\Big[A(t)\tilde L(t)+B(t)L(t)\Big]\Delta t\right)c_0+\int\limits_a^b\Big[A(t)\tilde M_{-1}(t)+B(t)M_{-1}(t)\Big]\Delta t+$$

$$+\left(\int\limits_a^b\left[A(t)\int\limits_a^t\int\limits_a^b\Big[K(\tau,s)\tilde L(s)+K_1(\tau,s)L(s)\Big]\Delta s\,\Delta\tau+\right.\right.$$

$$\left.\left.+B(t)\int\limits_a^b\Big[K(t,s)\tilde L(s)+K_1(t,s)L(s)\Big]\Delta s\right]\Delta t\right)P_\rho c_\rho,$$

і підставляючи $\tilde b_0$ в умову (9), одержуємо алгебраїчну систему відносно c_0:

$$B_0c_0=-P_{D^*_{d_1}}\left(\int\limits_a^b\Big[A(t)\tilde M_{-1}(t)+B(t)M_{-1}(t)\Big]\Delta t+\right.$$

$$+\left(\int\limits_a^b\left[A(t)\int\limits_a^t\int\limits_a^b\Big[K(\tau,s)\tilde L(s)+K_1(\tau,s)L(s)\Big]\Delta s\,\Delta\tau+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+B(t)\int\limits_a^b\Big[K(t,s)\tilde L(s)+K_1(t,s)L(s)\Big]\Delta s\right]\Delta t\right)P_\rho c_\rho\right),$$

яка при виконанні умови $P_{B_0^*}P_{D^*_{d_1}}=0$ має ρ-параметричну сім'ю розв'язків

$$\bar c_0:=-B_0^+P_{D^*_{d_1}}\int\limits_a^b\Big[A(t)\tilde M_{-1}(t)+B(t)M_{-1}(t)\Big]\Delta t,$$

$$D_0:=E_{r_1}-B_0^+P_{D^*_{d_1}}\left(\int\limits_a^b\left[A(t)\int\limits_a^t\int\limits_a^b\Big[K(\tau,s)\tilde L(s)+K_1(\tau,s)L(s)\Big]\Delta s\,\Delta\tau+\right.\right.$$

$$\left.\left.+B(t)\int\limits_a^b\Big[K(t,s)\tilde L(s)+K_1(t,s)L(s)\Big]\Delta s\right]\Delta t\right),$$

$$c_0 = \bar{c}_0 + D_0 P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Тоді система (6) має ρ-параметричну сім'ю розв'язків

$$\bar{x}_0(t, \bar{c}_0) := X_{r_1}(t)\bar{c}_0 + \bar{F}_{-1}(t, \bar{c}_{-1}), \qquad \bar{X}_0(t) := X_{r_1}(t) D_0 + \tilde{L}(t),$$
$$x_0(t, c_\rho) = \bar{x}_0(t, \bar{c}_0) + \bar{X}_0(t) P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Система (8) при виконанні умови $P_{B_0^*} P_{D_{d_1}^*} = 0$ має r_1-параметричну сім'ю розв'язків $x_1(t, c_1) = X_{r_1}(t) c_1 + F_0(t)$, де $F_0(t) = \tilde{f}_0(t) + \Psi_0(t) B_0^+ \tilde{b}_0$ — частинний розв'язок, c_1 — r_1-вимірний вектор констант, який буде однозначно визначений на наступному кроці з умови розв'язності рівняння для $x_2(t)$.

Аналогічно, як і у попередньому випадку, маємо

$$\bar{F}_0(t) := \left(\tilde{L}(t) + \Psi_0(t) B_0^+ \int_a^b \Big[A(t)\tilde{L}(t) + B(t) L(t) \Big] \Delta t \right) \bar{c}_0 +$$
$$+ \left(\tilde{M}_{-1}(t) + \Psi_0(t) B_0^+ \int_a^b \Big[A(t)\tilde{M}_{-1}(t) + B(t) M_{-1}(t) \Big] \Delta t \right),$$

$$H_0(t) := \int_a^t \int_a^b \big[K(\tau, s)\bar{X}_0(s) + K_1(\tau, s)\bar{X}_0^\Delta(s) \big] \Delta s \, \Delta\tau +$$
$$+ \Psi_0(t) B_0^+ \left(\int_a^b \left[A(t) \int_a^t \int_a^b \big[K(\tau, s)\bar{X}_0(s) + K_1(\tau, s)\bar{X}_0^\Delta(s) \big] \Delta s \, \Delta\tau + \right.\right.$$
$$\left.\left. + B(t) \int_a^b \big[K(t, s)\bar{X}_0(s) + K_1(t, s)\bar{X}_0^\Delta(s) \big] \Delta s \right] \Delta t \right).$$

$$F_0(t) = \bar{F}_0(t) + H_0(t) P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \varepsilon \mathbb{R}^\rho.$$

При ε^2 для знаходження $x_2(t)$ одержуємо лінійну неоднорідну систему

$$x_2^\Delta(t) - \Phi(t) \int_a^b \big[A(s) x_2(s) + B(s) x_2^\Delta(s) \big] \Delta s =$$
$$= \int_a^b \big[K(t, s) x_1(s) + K_1(t, s) x_1^\Delta(s) \big] \Delta s.$$

Нехай

$$f_1(t) = \int_a^b \big[K(t, s) x_1(s) + K_1(t, s) x_1^\Delta(s) \big] \Delta s.$$

Тоді система набуває вигляду

$$x_2^{\Delta}(t)-\Phi(t)\int\limits_a^b\big[A(s)x_2(s)+B(s)x_2^{\Delta}(s)\big]\Delta s=f_1(t). \tag{10}$$

За допомогою методу підстановки знаходимо

$$f_1(s)=L(s)c_1+\int\limits_a^b\big[K(\tau,s)F_0(s)+K_1(\tau,s)F_0^{\Delta}(s)\big]\Delta s,\qquad \tilde{f}_1(t)=\int\limits_a^t f_1(s)\,\Delta s,$$

$$\tilde{b_1}=\int\limits_a^b\Big[A(t)\tilde{f}_1(t)+B(s)f_1(t)\Big]\Delta t=\left(\int\limits_a^b\Big[A(t)\tilde{L}(t)+B(t)L(t)\Big]\Delta t\right)c_1+$$

$$+\left(\int\limits_a^b\left[A(t)\int\limits_a^t\int\limits_a^b[K(\tau,s)F_0(s)+K_1(\tau,s)F_0^{\Delta}(s)]\,\Delta s\,\Delta\tau+\right.\right.$$

$$\left.\left.+B(t)\int\limits_a^b\big[K(t,s)F_0(s)+K_1(t,s)F_0^{\Delta}(s)\big]\Delta s\right]\Delta t\right).$$

З умови розв'язності системи (10) $P_{D_{d_1}^*}\tilde{b_1}=0$ маємо алгебраїчну систему відносно c_1:

$$B_0c_1=-P_{D_{d_1}^*}\left(\int\limits_a^b\left[A(t)\int\limits_a^t\int\limits_a^b\big[K(\tau,s)F_0(s)+K_1(\tau,s)F_0^{\Delta}(s)\big]\Delta s\,\Delta\tau+\right.\right.$$

$$\left.\left.+B(t)\int\limits_a^b\big[K(t,s)F_0(s)+K_1(t,s)F_0^{\Delta}(s)\big]\Delta s\right]\Delta t\right),$$

яка буде розв'язною при виконанні умови $P_{B_0^*}P_{D_{d_1}^*}=0$ і буде мати ρ-параметричну сім'ю розв'язків. Нехай

$$M_0(t):=\int\limits_a^b\big[K(t,s)\bar{F}_0(s)+K_1(t,s)\bar{F}_0^{\Delta}(s)\big]\Delta s,\qquad \tilde{M}_0(t)=\int\limits_a^t M_0(\tau)\,\Delta\tau,$$

$$\bar{c}_1:=-B_0P_{D_{d_1}^*}\left(\int\limits_a^b\Big[A(t)\tilde{M}_0(t)+B(t)M_0(t)\Big]\Delta t\right),$$

$$D_1:=E_{r_1}-B_0^{+}P_{D_{d_1}^*}\left(\int\limits_a^b\left[A(t)\int\limits_a^t\int\limits_a^b\big[K(\tau,s)H_0(s)+K_1(\tau,s)H_0^{\Delta}(s)\big]\Delta s\,\Delta\tau+\right.\right.$$

$$\left.\left.+B(t)\int\limits_a^b\big[K(t,s)H_0(s)+K_1(t,s)H_0^{\Delta}(s)\big]\Delta s\right]\Delta t\right).$$

Тоді $c_1 = \bar{c}_1 + D_1 P_\rho c_\rho \ \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$. Таким чином, отримуємо

$$\bar{x}_1(t, \bar{c}_1) := X_{r_1}(t)\bar{c}_1 + \bar{F}_0(t), \qquad \bar{X}_1(t) := X_{r_1} D_1 + H_0(t).$$

Розв'язок системи (8) набуває вигляду

$$x_1(t, c_\rho) = \bar{x}_1(t, \bar{c}_1) + \bar{X}_1(t) P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Аналогічно розв'язок системи (10) набуває вигляду $x_2(t, c_2) = X_{r_1}(t)c_2 + F_1(t)$, де $F_1(t)$ — частинний розв'язок, $F_1(t) = \tilde{f}_1(t) + \Psi_0(t) B_0^+ \tilde{b_1}$, c_2 — r_1-вимірний вектор констант, який буде однозначно визначений на наступному кроці з умови розв'язності системи для $x_3(t)$. Тоді маємо

$$\bar{F}_1(t) = \left(\tilde{L}(t) + \Psi_0(t) B_0^+ \int_a^b \Big[A(t)\tilde{L}(t) + B(t)L(t)\Big]\Delta t\right)\bar{c}_1 +$$

$$+ \left(\tilde{M}_0(t) + \Psi_0(t) B_0^+ \int_a^b \Big[A(t)\tilde{M}_0(t) + B(t)M_0(t)\Big]\Delta t\right),$$

$$H_1(t) := \tilde{L}(t) D_1 + \int_a^t \int_a^b \big[K(\tau, s) H_0(s) + K_1(\tau, s) H_0^\Delta(s)\big]\Delta s\, \Delta\tau +$$

$$+ \Psi_0(t) B_0^+ D_1 \int_a^b \Big[A(t)\tilde{L}(t) + B(t)L(t)\Big]\Delta t +$$

$$+ \Psi_0(t) B_0^+ \Bigg(\int_a^b \Bigg[A(t) \int_a^t \int_a^b \big[K(\tau, s) H_0(s) + K_1(\tau, s) H_0^\Delta(s)\big]\Delta s\, \Delta\tau +$$

$$+ B(t) \int_a^b \big[K(\tau, s) H_0(s) + K_1(\tau, s) H_0^\Delta(s)\big]\Delta s\Bigg]\Delta t\Bigg),$$

$$F_1(t) = \bar{F}_1(t) + H_1(t) P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Нехай

$$M_1(t) := \int_a^b \big[K(t, s)\bar{F}_1(s) + K_1(t, s)\bar{F}_1^\Delta(s)\big]\Delta s, \qquad \tilde{M}_1(t) = \int_a^t M_1(\tau)\,\Delta\tau,$$

$$\bar{c}_2 := -B_0 P_{D_{d_1}^*}\left(\int_a^b \Big[A(t)\tilde{M}_1(t) + B(t)M_1(t)\Big]\Delta t\right),$$

$$D_2 := E_{r_1} - B_0^{+} P_{D_{d_1}^*} \Bigg(\int_a^b \Bigg[A(t) \int_a^t \int_a^b \big[K(\tau, s) H_1(s) + K_1(\tau, s) H_1^{\Delta}(s) \big] \Delta s \, \Delta\tau +$$

$$+ B(t) \int_a^b \big[K(t, s) H_1(s) + K_1(t, s) H_1^{\Delta}(s) \big] \Delta s \Bigg] \Delta t \Bigg).$$

Таким чином, $c_2 = \bar{c}_2 + D_2 P_\rho c_\rho \ \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$. Загальний розв'язок системи (9) має вигляд

$$x_2(t, c_\rho) = \bar{x}_2(t, \bar{c}_2) + \bar{X}_2(t) P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho,$$

де

$$\bar{x}_2(t, \bar{c}_2) := X_{r_1}(t) \bar{c}_2 + \bar{F}_1(t), \qquad \bar{X}_2(t) := X_{r_1} D_2 + H_1(t).$$

Використовуючи метод математичної індукції, легко показати, що для знаходження коефіцієнтів ряду Лорана $x_k(t, c_k)$ на кожному наступному кроці отримуємо інтегродинамічну систему

$$x_k^{\Delta}(t) - \Phi(t) \int_a^b \big[A(s) x_k(s) + B(s) x_k^{\Delta}(s) \big] \Delta s = f_{k-1}(t), \tag{11}$$

де

$$f_{k-1}(t) = \int_a^b \big[K(t, s) x_{k-1}(s) + K_1(t, s) x_{k-1}^{\Delta}(s) \big] \Delta s.$$

Якщо умова $P_{B_0^*} P_{D_{d_1}^*} = 0$ виконується, то система (11) має r_1-параметричну сім'ю розв'язків

$$x_k(t, c_k) = X_{r_1}(t) c_k + F_{k-1}(t), \tag{12}$$

де складові елементи (12) визначаються з такої ітераційної процедури:

$$\bar{F}_{k-1}(t) = \Bigg(\tilde{L}(t) + \Psi_0(t) B_0^{+} \int_a^b \Big[A(t) \tilde{L}(t) + B(t) L(t) \Big] \Delta t \Bigg) \bar{c}_{k-1} +$$

$$+ \Bigg(\tilde{M}_{k-2}(t) + \Psi_0(t) B_0^{+} \int_a^b \Big[A(t) \tilde{M}_{k-2}(t) + B(t) M_{k-2}(t) \Big] \Delta t \Bigg),$$

$$H_{k-1}(t) := \tilde{L}(t)D_{k-1} + \int\limits_a^t \int\limits_a^b \big[K(\tau,s)H_{k-2}(s) + K_1(\tau,s)H^{\Delta}_{k-2}(s)\big]\Delta s\,\Delta\tau +$$

$$+\Psi_0(t)B_0^+ D_{k-1}\int\limits_a^b \Big[A(t)\tilde{L}(t) + B(t)L(t)\Big]\Delta t +$$

$$+\Psi_0(t)B_0^+\left(\int\limits_a^b \left[A(t)\int\limits_a^t\int\limits_a^b \big[K(\tau,s)H_{k-2}(s) + K_1(\tau,s)H^{\Delta}_{k-2}(s)\big]\Delta s\,\Delta\tau +\right.\right.$$

$$\left.\left.+B(t)\int\limits_a^b \big[K(\tau,s)H_{k-2}(s) + K_1(\tau,s)H^{\Delta}_{k-2}(s)\big]\Delta s\right]\Delta t\right),$$

$$F_{k-1}(t) = \bar{F}_{k-1}(t) + H_{k-1}(t)P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Нехай

$$M_{k-1}(t) := \int\limits_a^b \big[K(t,s)\bar{F}_{k-1}(s) + K_1(t,s)\bar{F}^{\Delta}_{k-1}(s)\big]\,\Delta s, \qquad \tilde{M}_{k-1}(t) = \int\limits_a^t M_{k-1}(\tau)\,\Delta\tau,$$

тоді

$$\bar{c}_k := -B_0 P_{D^*_{d_1}}\left(\int\limits_a^b \Big[A(t)\tilde{M}_{k-1}(t) + B(t)M_{k-1}(t)\Big]\Delta t\right),$$

$$D_k := E_{r_1} - B_0^+ P_{D^*_{d_1}}\left(\int\limits_a^b \left[A(t)\int\limits_a^t\int\limits_a^b \big[K(\tau,s)H_{k-1}(s) + K_1(\tau,s)H^{\Delta}_{k-1}(s)\big]\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\Delta s\,\Delta\tau + B(t)\int\limits_a^b \big[K(t,s)H_{k-1}(s) + K_1(t,s)H^{\Delta}_{k-1}(s)\big]\Delta s\right]\Delta t\right).$$

Таким чином, $c_k = \bar{c}_k + D_k P_\rho c_\rho$ $\forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$. Загальний розв'язок системи (11) набуває вигляду

$$x_k(t,c_\rho) = \bar{x}_k(t,\bar{c}_k) + \bar{X}_k(t)P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho,$$

де

$$\bar{x}_k(t,\bar{c}_k) := X_{r_1}(t)\bar{c}_k + \bar{F}_{k-1}(t), \qquad \bar{X}_k(t) := X_{r_1}D_k + H_{k-1}(t).$$

Отже, при виконанні умови $P_{B_0^*}P_{D^*_{d_1}} = 0$ система (1) має ρ-параметричну сім'ю розв'язків при будь-яких $f(t) \in L_2[a;b)_{\mathbb{T}}$ у вигляді ряду (4), який збігається при фіксованих $\varepsilon \in (0;\varepsilon_*]$:

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k \left(\bar{x}_k(t,\bar{c}_k) + \bar{X}_k(t)P_\rho c_\rho\right) \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Доведемо збіжність даного ряду, мажоруючи відповідні ряди:

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k\bar{x}_k(t,\bar{c}_k)+\sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k\bar{X}_k(t)P_\rho c_\rho.$$

Спочатку доведемо збіжність ряду $\sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k\bar{x}_k(t,\bar{c}_k)$. Оцінимо коефіцієнти $\bar{x}_k(t,\bar{c}_k)$ і $\bar{c}_k$ для будь-якого $t\in[a;b)_{\mathbb{T}}$. Нехай

$$\alpha=\|A(t)\|,\qquad \beta=\|B(t)\|,\qquad \beta_0=\|B_0(t)\|,\qquad p=\|P_{D^*_{d_1}}\|,\qquad k=\|K(t,s)\|,$$

$$k_1=\|K_1(t,s)\|,\qquad \psi_0=\|\Psi_0(t)\|,\qquad \omega=\|X_{r_1}(t)\|,\qquad \gamma=\alpha+\beta,\qquad \gamma_1=k+k_1.$$

Далі зобразимо $\|\bar{x}_k(t,\bar{c}_k)\|$ через $\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|$.

На першому кроці отримуємо

$$\bar{x}_1(t,\bar{c}_1)=X_{r_1}\bar{c}_1+\bar{F}_0(t,\bar{c}_0),$$

$$\|\bar{F}_0(t,\bar{c}_0)\|\le\gamma_1(1+\psi_0\beta_0\gamma)\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|,$$

Таким чином, $\|\bar{c}_1\|\le\beta_0p\gamma_1^2\gamma(1+\psi_0\beta_0\gamma)\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|$. Тоді

$$\|\bar{x}_1(t,\bar{c}_1)\|\le\omega\|\bar{c}_1\|+\|\bar{F}_0(t,\bar{c}_0)\|\le(\omega\beta_0p\gamma_1\gamma+1)(1+\psi_0\beta_0\gamma)\gamma_1\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|.$$

Відповідно

$$\|\bar{c}_2\|\le\beta_0p\gamma_1\gamma\|\bar{F}_1(t,\bar{c}_1)\|\le\beta_0p\gamma_1^3\gamma(1+\psi_0\beta_0\gamma)^2(\omega\beta_0p\gamma_1\gamma+1)\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|,$$

$$\|\bar{x}_2(t,\bar{c}_2)\|\le\omega\|\bar{c}_2\|+\|\bar{F}_1(t,\bar{c}_1)\|\le\left[(\omega\beta_0p\gamma_1\gamma+1)(1+\psi_0\beta_0\gamma)\gamma_1\right]^2\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|.$$

Продовжуючи цей процес, легко помітити, що для коефіцієнтів $\bar{c}_k\in\mathbb{R}^{r_1}$, $\bar{x}_k(t,\bar{c}_k)$ справедливі оцінки

$$\|\bar{c}_k\|\le\beta_0p\gamma_1\gamma\gamma_1^{k+1}(1+\psi_0\beta_0\gamma)^k(\omega\beta_0p\gamma_1\gamma+1)\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|,$$

$$\|\bar{x}_k(t,\bar{c}_k)\|\le\left[\gamma_1(\omega\beta_0p\gamma_1\gamma+1)(1+\psi_0\beta_0\gamma)\right]^k\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|,\quad k=1,2,\ldots.$$

Нехай $N_1=\gamma_1(\omega\beta_0p\gamma_1\gamma+1)(1+\psi_0\beta_0\gamma)$. Тоді для будь-якого $t\in[a,b)_{\mathbb{T}}$ відповідний мажорантний ряд має вигляд

$$\varepsilon^{-1}\|\bar{x}_{-1}(t,\bar{c}_{-1})\|+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^k\,N_1^k\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|.$$

При цьому $\|\bar{x}_{-1}(t,\bar{c}_{-1})\|$ та $\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|$ обмежені. Тому для будь-якого $t\in[a,b)_{\mathbb{T}}$ і фіксованого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*]$, де $\varepsilon_*<\dfrac{1}{N_1}$, цей ряд рівномірно збіжний. Розглянемо ряд

$$\sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k\bar{X}_k(t)P_\rho c_\rho.$$

Подамо $\|\bar{X}_k(t)\|$ через $\|\bar{X}_0(t)\|$. На першому кроці маємо

$$\bar{X}_1(t) = X_{r_1} D_1 + H_0(t,s), \qquad \|H_0(t)\| \le \gamma_1(1+\psi_0\beta_0\gamma)\|\bar{X}_0(t)\|.$$

Тоді

$$\|\bar{X}_1(t)\| \le (\omega\gamma\gamma_1+1)\|H_0(t)\| \le (\omega\gamma\gamma_1+1)(1+\psi_0\beta_0\gamma)\gamma_1\|\bar{X}_0(t)\|.$$

На другому кроці

$$\|\bar{X}_2(t)\| \le (\omega\gamma\gamma_1+1)\|H_1(t)\| \le (\omega\gamma\gamma_1+1)(1+\psi_0\beta_0\gamma)\gamma_1\|\bar{X}_1(t)\| \le$$
$$\le \left[(\omega\gamma\gamma_1+1)(1+\psi_0\beta_0\gamma)\gamma_1\right]^2 \|\bar{X}_0(t)\|.$$

Продовжуючи цей процес, бачимо, що для коефіцієнтів $\bar{X}_k(t)$ справедливі оцінки

$$\|\bar{X}_k(t)\| \le \left[(\omega\gamma\gamma_1+1)(1+\psi_0\beta_0\gamma)\gamma_1\right]^k \|\bar{X}_0(t)\|, \quad k=1,2,\ldots.$$

Нехай $N_2 = (\omega\gamma\gamma_1+1)(1+\psi_0\beta_0\gamma)\gamma_1$. Тоді для будь-якого $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$ маємо

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k \bar{X}_k(t) P_\rho c_\rho \le \left[\varepsilon^{-1}\|\bar{X}_{-1}(t)\| + \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i N_2^i \|\bar{X}_0(t)\|\right]\|P_\rho c_\rho\|.$$

При цьому $\|\bar{X}_{-1}(t)\|$ і $\|\bar{X}_0(t)\|$ обмежені. Тому при будь-якому $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$ і фіксованому $\varepsilon \in (0,\varepsilon_*]$, де $\varepsilon_* < \dfrac{1}{N_2}$, цей ряд рівномірно збіжний.

Виберемо $\varepsilon_* < \min\left(\dfrac{1}{N_1}, \dfrac{1}{N_2}\right)$. Тоді ряд (4) буде рівномірно збіжним:

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k \left(\bar{x}_k(t,\bar{c}_k) + \bar{X}_k(t)P_\rho c_\rho\right) \le \varepsilon^{-1}\left[\|\bar{x}_{-1}(t,\bar{c}_{-1})\| + \|\bar{X}_{-1}(t)\|\|P_\rho c_\rho\|\right] +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k N^k \left[\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\| + \|\bar{X}_0(t)\|\|P_\rho c_\rho\|\right]$$
$$\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_*] \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Аналогічно показуємо збіжність ряду з похідних.

Зауваження 1. Умова (3) є достатньою умовою існування розв'язку системи (1). Якщо умова (3) не виконується, то розв'язок системи (1) у вигляді ряду (4) не існує, але може існувати у вигляді частини ряду Лорана типу (4) по степенях $-2, -3, \ldots$ малого параметра ε.

Зауваження 2. Якщо додатково вимагати виконання умови $P_{B_0} = 0$, то система (1) буде мати єдиний розв'язок у вигляді збіжного ряду:

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k \bar{x}_k(t,\bar{c}_k).$$

Автори висловлюють щиру подяку проф. О. А. Бойчуку за постановку задачі та увагу до роботи.

Література

1. А. М. Самойленко, О. А. Бойчук, С. А. Кривошея, *Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром*, Укр. мат. журн., **48**, № 11, 1576 – 1579 (1996); ***English translation:*** Ukr. Math. J., **48**, 1785–1789 (1996).
2. С. А. Кривошея, *Умови розв'язності нетерових крайових задач для інтегро-диференціальних систем*, Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки, вип. 4 (2001).
3. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, Utrecht, Boston, VSP (2004); 2nd ed., de Gruyter, Berlin (2016).
4. I. Golovatska, *Weakly perturbed boundary-value problems for systems of integro-differential equations*, Tatra Mt. Math. Publ., **54**, 61 – 71 (2013).
5. I. Bondar, *Weakly perturbed boundaty-value problems for systems of integro-differential equations with impulsive action*, Tatra Mt. Math. Publ., **63**, № 1, 73 – 87 (2015).
6. І. А. Бондар, Р. Ф. Овчар, *Біфуркація розв'язків крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром*, Нелін. коливання, **20**, № 4, 465 – 476 (2017); ***English translation:*** J. Math. Sci., **238**, 224 – 235 (2019)).
7. О. А. Бойчук, О. П. Страх, *Нетерові крайові задачі для систем лінійних інтегро-динамічних рівнянь з виродженим ядром на часовій шкалі*, Нелін. коливання, **17**, № 1, 32 – 38 (2014); ***English translation:*** J. Math. Sci., **205**, 749 – 756 (2015)).
8. R. P. Agarwal, M. Bohner, A. Boichuk, O. Strakh, *Fredholm boundary-value problems for perturbed systems of dynamic equations on time scales*, Math. Methods Appl. Sci., **38**, № 17, 4178 – 4186 (2015).
9. Вишик М. И., Люстерник Л. А., *Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I*, Успехи мат. наук, **15**, № 3, 3 – 80 (1960); ***English translation:*** Russian Math. Surveys, **15**, № 3, 1–73 (1960).

Одержано 12.01.21,
після доопрацювання — 10.02.21