

Нестеренко О.Б., к.фіз.-мат.н., доц., Арендар К.М., студентка
Київський національний університет технологій та дизайну

КРАСА І СИЛА ФРАКТАЛІВ

Анотація. В статті розглянуто фрактали і фрактальні структури, які є цікавими не тільки своїм математичним зображенням, а й тим, що вони дають можливість візуалізувати математику. Зроблено огляд і аналіз літературних джерел для визначення поняття фракталу. Висвітлено історію виникнення фракталів і фрактальної геометрії та розглянуто їх застосування в різних галузях нашого життя.

Ключові слова: фрактал; фрактальна геометрія; фрактальна структура; фрактальний дизайн; фрактальна архітектура.

Nesterenko O.B., Arendar K.M.

Kyiv National University of Technologies and Design

BEAUTY AND POWER OF FRACTALS

Abstracts. The article considers fractals and fractal structures that are interesting not only for their mathematical representation, but also for the fact that they provide an opportunity to visualize mathematics. A review and analysis of literature sources to define the concept of fractal are done. The history of fractals and fractal geometry is covered and their application in different areas of our lives is considered.

Keywords: fractal; fractal geometry; fractal structure; fractal design; fractal architecture.

Вступ. Більшість явищ природи і багато артефактів не мають правильних геометричних форм евклідової геометрії. Фрактальна геометрія пропонує практично необмежені способи опису, вимірювання і передбачення цих природних явищ.

У контрольованому математичному середовищі самоподібний об'єкт часто відображає точне повторення форм (візерунків) при різному збільшенні. В природних умовах закономірності не повторюються в точності, але більшість з них демонструють одні й ті ж самі статистичні властивості у безлічі різних масштабів.

Безперечним є той факт, що левова частка заслуг у розвитку фрактальної геометрії належить Бенуа Мандельброту, але, в минулому, багато інших математиків заклали основи його робіт: Карл Вейерштрасс, Георг Кантор, Фелікс Хаусдорф, Гастон Джуліа, П'єр Фату і Поль Леві.

Значний вклад в розвиток фрактальної геометрії та фрактального аналізу зробили вітчизняні вчені. М.В. Працьовитий та учні його наукової школи у своїх дослідженнях з теорії кодування і стиснення інформації виявили тісні зв'язки властивостей фракталів з деякими критичними показниками складних систем. Розробка моделей засобів захисту інформації та технологія захисту продукції спеціального призначення на основі фрактальної геометрії висвітлена у роботах А.В. Шевчука, М.А. Назаркевич, І.М. Дронюк, О.А. Троян, Т.Ю. Томашук, А.Ф. Турбіна. Застосування фракталів в алгоритмах шифрування та в інформаційній і кібернетичній безпеці розглядали в своїх роботах О.В. Трунова і Г.І. Тур, а Д.В. Ланде проаналізував перспективу прикладного використання фракталів в освітній галузі. Дослідженню фрактальних алгоритмів в індустрії моди присвячені роботи С.Г. Кулешової, О.О. Ляковської, О.А. Калашнікової. Застосування фрактальної структури в орнаментах української національної вишивки висвітлено у А.Л. Славінської і О.П. Сиротенко.

Останні роки фрактальна геометрія стає все більш поширеною у різних галузях науки і термін «фрактал», як і поняття «фрактальна геометрія», все частіше використовуються. Вивчення основ і подальші дослідження фракталів, їх властивостей,

можливостей застосування в різних областях людської діяльності дозволяють підвищити ефективність вирішення багатьох прикладних задач.

Постановка завдання. Більшість людей розпізнають фрактали тільки як красиві картинки, які можна використовувати як оригінальні візерунки на листівках або фон на екрані комп'ютера.

Метою дослідження є розширення відомостей про фрактали, фрактальну геометрію, історію їх виникнення, вплив на життя людини, багатовекторність щодо сфер застосування, ілюстративний огляд деяких фрактальних досліджень, з перспективою прикладного використання в освітній діяльності.

Результати досліджень. Відомим є той факт, що більшість об'єктів в природі і створених руками людини є фрактальними як в мікроскопічному, так і в макроскопічному масштабі. Важливість і особливість фрактальної геометрії пов'язана з її здатністю аналізувати не тільки природні структури, але і різні процеси. Тому фрактальний аналіз все більше використовується в різних областях науки. При цьому реальний діапазон масштабів, де спостерігаються фрактали, простягається від відстаней між молекулами в полімерах до відстані між скупченнями галактик у Всесвіті.

Багатьох зачаровують красиві зображення, звані фракталами. Виходячи за межі типового сприйняття математики як сукупності складних, нудних формул, фрактальна геометрія змішує мистецтво з математикою, щоб продемонструвати, що рівняння - це більше, ніж просто набір чисел. Що робить фрактали ще більш цікавими, так це те, що вони є кращим з існуючих математичних описів багатьох природних форм, таких як блискавка, крижинка, мушля, папороть, кристали, гори тощо.



Рис. 1. Природні ілюстрації фракталів

Ідея фракталів несе в собі глибоку красу і силу.

Термін «фрактал» увів у 1975 році Бенуа Мандельброт. У середині 1960-х років Мандельброт розробив теорію так званої «фрактальної геометрії» або «геометрії природи». На жаль, не існує простого і точного визначення фракталів.

Фрактал (лат. *fractus* – подрібнений, дробовий) – нерегулярна, самоподібна структура. В широкому розумінні фрактал означає фігуру, малі частини якої в довільному збільшенні є подібними до неї самої [1].

Ще одним з визначень фрактала є наступне: фрактал – це геометрична фігура, що складається з частин і яка може бути поділена на частини, кожна з яких буде представляти зменшену копію цілого. Мається на увазі графічне зображення структури, яка в більшому масштабі подібна сама собі [2].

Найпростішим прикладом можна назвати криву Коха.

Двома найважливішими властивостями фракталів є самоподібність і нецілочисельна (дробова) розмірність. Якщо уважно подивитися на лист папороті, можна помітити, що кожен маленький листок є частиною більшого і має таку ж форму,

що і весь лист папороті. Тобто, лист папороті самоподібний. Те ж саме і з фракталами: багаторазово збільшуючи їх, після кожного кроку буде отримуватись та ж форма, яка є характерною саме для цього конкретного фрактала.



Рис. 2. Етапи побудови кривої Коха

Поняття дробової розмірності, звичайно, дивує. Адже більш звичною є топологічна цілочисельна розмірність: для лінії – 1, для площині – 2, для об'єму – 3. Уявимо собі, наприклад, зім'ятий аркуш паперу – вже не площина, але ще і не об'єм. Математично доведено, що цей складчастий кулеподібний об'єкт має дробову фрактальну розмірність, приблизно 2,5.

Відкриття Мандельбротом фрактальних об'єктів дозволило по-новому поглянути на дивовижний світ форм, існуючих в природі. Більшість з них, не будучи правильними геометричними об'єктами, можуть бути охарактеризовані дробовими розмірностями.

Хоча фрактальна геометрія тісно пов'язана з комп'ютерними технологіями, британські картографи «працювали» з фракталами ще задовго до винаходу комп'ютерів. Вони зіткнулися з проблемою вимірювання довжини узбережжя Великобританії. Берегова лінія, виміряна на великомасштабній карті, становила приблизно половину довжини берегової лінії, яка вимірювалась на детальній карті. Чим меншим був масштаб, тим детальніше і довше ставала берегова лінія. Це відбувалося через те, що при великому збільшенні ставало можливим враховувати все нові і нові вигини узбережжя, які раніше ігнорувалися через грубі вимірювання. Картографи тоді навіть не усвідомлювали, що стикнулися з однією із основних властивостей фракталів.

Одне з перших зображень фрактала було графічною інтерпретацією множини Мандельброта, завдяки дослідженням Гастона Моріса Жюліа. Цей французький математик задався питанням, як буде виглядати безліч, якщо побудувати її на основі простої формули, яка проітерована циклом зворотного зв'язку. Якщо пояснити «на пальцях», це означає, що для конкретного числа ми знаходимо по формулі нове значення, після чого підставляємо його знову в формулу і отримуємо ще одне значення. Результат – велика послідовність чисел. Щоб отримати повне уявлення про таку кількість, потрібно зробити величезну кількість обчислень – сотні, тисячі, мільйони. Вручну це зробити було просто нереально. Але, коли в розпорядженні математиків з'явилися потужні обчислювальні пристрої, вони змогли по-новому поглянути на формули і вирази, які давно викликали інтерес. Мандельброт був першим, хто використав комп'ютер для прорахунку класичного фрактала. Обробивши послідовність, що складається з великої кількості значень, він переніс результати на координатну площину. Це зображення, згодом, було розфарбовано і стало одним з найпопулярніших зображень, створених людиною [3].

За допомогою фрактальної геометрії можливо візуально моделювати багато з того, що ми бачимо в природі, наприклад, берегові лінії і гори. Фрактали використовуються для моделювання ерозії ґрунту, а також для аналізу сейсмічних структур.

Екологи виявили, що фрактальна геометрія є надзвичайно корисним інструментом для опису екологічних систем. Багато екологів, які займаються питаннями населення, спільнот, екосистем і ландшафтів, використовують фрактальну геометрію як інструмент, що допомагає визначати і пояснювати системи в навколишньому середовищі. Як і в будь-якій області науки, в екології існують розбіжності з приводу

методів дослідження. Наприклад, деякі екологи вважають, що аналіз чогось більшого, ніж один організм, спотворює реальність занадто великою кількістю деталей. З іншого боку, деякі екологи вважають, що розгляд чогось меншого, ніж цілісна екосистема, не дасть значних результатів. Насправді обидві точки зору правильні. Екологи повинні брати до уваги всі рівні організації, щоб отримати максимальну віддачу від дослідження. Фрактальна геометрія – це інструмент, який усуває «розрив» між різними областями екології та забезпечує спільну мову [4].

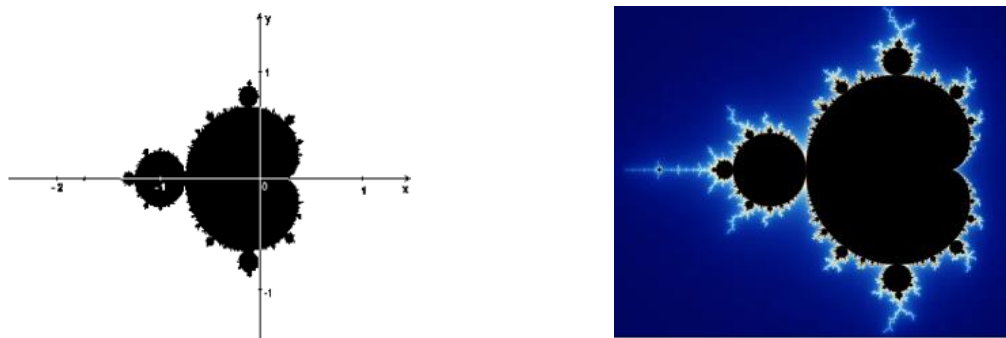


Рис. 3. Графічне зображення множини Мальдельброта

У біології при моделюванні природи, традиційно використовували евклідові уявлення природних об'єктів, зображуючи серцебиття у вигляді синусоїд, хвойні дерева – у вигляді шишок, місця мешкання тварин – у вигляді простих ділянок, а клітинні мембрани – у вигляді кривих або простих поверхонь. Однак вчені дійшли до висновку, що багато природних конструкцій краще характеризуються за допомогою фрактальної геометрії, оскільки всі вони мають складні нескінченні моделі і процеси в набагато меншому масштабі. Фрактальні структури присутні на всіх рівнях живого організму. Фрактали використовуються для прогнозування або аналізу різних біологічних процесів або явищ, таких як характер росту бактерій, зростання популяцій, дендрити нервів.

Фрактальна геометрія знаходить своє застосування в різних областях медицини, таких як кардіологія, нейробиологія, патологія, молекулярна біологія, онкологія тощо.

У людському організмі є низка природних фракталів. Зокрема, бронхи розгалужуються за фрактальною закономірністю. Кожний із бронхів ділиться на два меншого діаметру, які, своєю чергою, також діляться на два менші і так далі. Розгалуження кровоносних судин також має фрактальну закономірність. І це не примха природи, а життєва необхідність забезпечення всіх однотипних клітин певної тканини організму киснем і поживними речовинами однаковою мірою. Порушення фрактальності є ознакою патологічного процесу. Для прикладу, злоякісні пухлини характеризуються втратою фрактальності артерій і артеріол [5].



Рис. 4. Фрактальна структура бронхіального дерева

Фахівці в галузі фізичної хімії, хімічної фізики та комп'ютерного моделювання застосовують фрактали, як цінний робочий ресурс, для моделювання хімічних явищ, таких як агрегація, адсорбція, деградація, каталіз, хімічна реакційна здатність і турбулентне полум'я.

Потужні математичні розробки, правильна алгоритмізація функцій дозволяє ефективно використовувати теорію фракталів для захисту інформації. На сьогодні існує достатня кількість вже реалізованих алгоритмів фрактального моделювання у вигляді програмного забезпечення. Проте, використання різних моделей фракталів для створення надійних систем захисту інформації потребує подальшого вивчення [6].

Бенуа Мандельброт спробував використати фрактальну математику для опису фінансового ринку, з точки зору прибутків і збитків трейдерів з плином часу, і виявив, що це можливо і добре працює.

Зазвичай фрактал вважається геометричним поняттям, що вводить кількісну фрактальну розмірність або поняття самоподібності. Однак в економіці поняття фракталів, в основному, використовується в сенсі розподілу за степеневим законом.

Першим таким прикладом фрактала були коливання цін на бавовняному ринку Нью-Йорка, проаналізовані Мандельбротом з щоденними даними за період понад сто років. У роботі «The (mis)Behavior of Markets. A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward» (2006) він звертає увагу на застосування фрактальних концепцій до ринків і попереджає про величезні ризики, які можуть понести трейдери, схильні діяти так, ніби ринок передбачуваний і несприйнятливий до великих коливань. Більшість фінансових моделей недооцінюють фінансові ризики, оскільки використовують такі параметри, які призначені для вимірювання волатильності цін. Мандельброт висвітлює, що більшість з цих параметрів не просто марні, вони є небезпечними і можуть призвести до всесвітнього фінансового краху. Він показує, що коливання цін не є незалежними від періоду часу, що вони однакові, незалежно від часових рамок (години, дні, місяці, роки), що коливання цін підкоряються не гауссовському розподілу, а степеневому. Фактично, книга присвячена фрактальним процесам, використовуючи фінансові ринки в якості прикладів.

Відтоді в галузі економіки було знайдено багато прикладів фракталів: зміни цін на ринку, розподіл доходів, грошові потоки, дані про продажі і мережеві структури.



Рис. 5. Ринковий фрактал

Фрактал не міг не привернути увагу дизайнерів, як новий ресурс для створення інноваційних рішень в індустрії моди. Фрактальна геометрія дозволяє робити приголомшливі невичерпні різнокольорові візерунки, які дизайнери використовують при виробництві одягу, взуття, а також килимів і предметів домашнього декору.

В даний час фрактальні зображення широко застосовуються для дизайну інтер'єру. Картини, створені на основі фрактальної графіки, дозволяють і візуально збільшити простір приміщення, і надають затишок.

Теорія фрактальних візерунків застосовується при дизайні шовкових шарфів і тканин для одягу за допомогою технології цифрового друку, яка може повністю відобразити практичність і перевагу упорядкованих візерунків на одязі на основі теорії фракталів. Ґрунтуючись на результатах експериментів, створення систематичних візерунків для друку на тканині на основі теорії фракталів цілком можливо, а розроблені незвичайні художні візерунки мають велику практичну цінність [7].



Рис. 6. Фрактальний дизайн

В архітектурі фрактальна геометрія використовується різними способами: спонтанно або навмисно. Надзвичайно важливим в архітектурному дизайні є передбачення гармонії між старим і новим. Фрактальна геометрія може бути використана для створення цілковито нових форм, але також і для гармонійного поєднання старого і нового. Це допомагає визначити нові архітектурні моделі та естетику, що завжди лежить в основі мінливих художніх ідей різних періодів, шкіл та культур [8].

Архітектори, проектуючи з використанням фрактальної геометрії, створюють привабливі фасади та складні декоративні візерунки на них. Яскравими прикладами фрактальних архітектурних фасадів, на яких такі форми, як арки і куполи, повторюються в різних ієрархічних масштабах є ратуши, індійські храми, готичні собори.



Ратуша в Брюсселі



Індійський храм



Міланський собор

Рис. 7. Фрактальні архітектурні фасади

Прикладів застосування фрактальної геометрії в сучасній архітектурі та цивільному будівництві багато, і майже немає галузі цих двох технічних наук, в якій фрактали не застосовуються. Більш того, з великою впевненістю можна стверджувати, що є ще багато архітектурних і цивільних інженерних об'єктів і форм, фрактальний аналіз яких ще не проведено.

Важливим і складним завданням подальших архітектурних досліджень в області фракталів може бути пошук таких фрактальних систем, за допомогою яких можливо створювати високоефективні структури, які об'єднують психологічні, естетичні та екологічні аспекти в інтегрований дизайн.

Висновки. Інтерес до фрактальної геометрії неухильно зростає через чарівну красу фракталів, а також через те, що багато форм в природі, якщо не всі, є неправильними за формою або хаотичними. Фрактальна геометрія, на відміну від геометрії Евкліда, пропонує значно кращі методи для опису природних об'єктів. Ось чому області застосування фрактальної геометрії будуть і далі залишатися предметом досліджень нових винахідників, які, як і їх попередники і сучасники, будуть прагнути знайти гармонію між чіткої точністю і хаотичною недосконалістю.

Список використаної літератури

1. Фрактал [Електронний ресурс] / Вікіпедія. – Режим доступу: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Фрактал>.
2. Szoke, I., Holban, S. (2008). A Short Introduction in the History of Fractals. 9th International Conference on Development and Application Systems, Suceava, Romania, May 22–24, 2008, P. 179–181 <http://www.dasconference.ro/papers/2008/D11.pdf>.
3. Кто впервые вжив термин фрактал. Хаос і порядок: фрактальний світ. Рекомендуємо: Фрактали використовуються фахівцями в трейдингу [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://vit-vladimir.ru/uk/kto-vperve-upotrebil-termin-fraktal-haos-i-poryadok-fraktalnyi-mir/>
4. The Application of Fractal Geometry to Ecology. Retrieved from: <http://www.fractal.org/Bewustzijns-Besturings-Model/Application-Fractal-Geometry.pdf>
5. Свиридюк В. З. Теорія фракталів та її використання в медицині / В. З. Свиридюк // Україна. Здоров'я нації. – 2017. – № 1. – С. 124–132. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Uzn_2017_1_21.
6. Матеріали VIII Міжнар. наук.-практ. конф. "Математика в сучасному технічному університеті", Київ, 27–28 грудня 2019 р. – Вінниця: Видавець ФОП Кушнір Ю. В., 2020. – 336 с. – С. 67–70.
7. Wang, W., Zhang, G., Yang, L. et al. (2019). Research on garment pattern design based on fractal graphics. J Image Video Proc., 29 (2019). Retrieved from: <https://doi.org/10.1186/s13640-019-0431-x>.
8. Sala, N. (2006). Fractal geometry and architecture: Some interesting connections, WIT Transactions on the Built Environment, Vol. 86, Pp. 163–173. Retrieved from: <https://pdfs.semanticscholar.org/7068/8edc8262ebcc16b9eec18d3b9d0f864b9ac6.pdf>.