

Кінетика процесу водовбирання багат шаровими текстильними композиційними матеріалами

С.І. КОВТУН

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ТЕХНОЛОГІЙ ТА ДИЗАЙНУ

М.Л. Рябчиков

Українська інженерно-педагогічна академія

Математична модель процесу водовбирання

Повідомлення 2

Отримано математичні вирази для опису кінетики процесу водовбирання багат шаровими текстильними композиційними матеріалами

Для опису кінетики процесу водовбирання текстильними матеріалами (ТМ) за умови їх горизонтального розташування відносно джерела надходження рідини використовують неоднорідні лінійні диференційні рівняння [1,2]. Так, у роботі [2] автори встановили, що цей процес може бути описаний рівнянням такого типу:

$$\frac{du}{dt} = u_0 - ku \quad , \quad (1)$$

де u – усереднена по всій товщині ТМ концентрація поглинутої пробою рідини; $\frac{du}{dt}$ – швидкість підвищення концентрації u . Вона залежить від товщини, але не залежить від розміру поверхні проби за умови, що одна її сторона рівномірно по всій поверхні торкається рідини; u_0 – швидкість надходження рідини в одиницю об'єму проби; k – константа швидкості гальмування процесу водовбирання пробою ТМ; ku – швидкість гальмування надходження рідини в силу того, що пробою ТМ вже частково поглинута рідина.

Зробивши певні математичні перетворення в рівнянні (1), автори [1,2] запропонували таке рівняння кривої, що описує типові криві кінетики процесу водовбирання одношаровим матеріалом:

$$u_h = u_{h\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_h}} \right), \quad (2)$$

де $u_{h\infty}$ – загальна кількість рідини, яку може ввібрати досліджувана проба ТМ, поверхня якої дорівнює одиниці, при $t \rightarrow \infty$, г/см²; τ_h – «постійна часу» процесу, що розглядається: $u_{h\infty} = U_h \cdot \tau_h$; U_h – швидкість надходження рідини в одиницю об'єму проби ТМ, г/см²·хв; r_h

– константа швидкості гальмування процесу вбирання рідини ТМ, $\tau_h = \frac{1}{r_h}$. Усі величини залежать від товщини h ТМ.

Використання рівняння (2) для опису процесу водовбирання багат шаровими текстильними композиційними матеріалами (ТКМ) з верхнім шаром із поліпропіленового полотна «Sa» вказало на високий збіг експериментальних та розрахункових кривих [4].

У свою чергу, зіставлення експериментальних даних по кінетиці водовбирання багат шаровими ТКМ з верхнім шаром з бавовняно-поліефірного полотна Sp з розрахунковими даними, одержаними за рівнянням (2), вказало на неможливість використання його для опису цього процесу [4].

Постановка завдання

Такі результати дослідження окреслили необхідність виведення загального кінетичного рівняння процесу водовбирання багат шаровими полотнами різного складу.

Об'єкти та методи дослідження

Об'єктом дослідження є процес водовбирання багат шаровими текстильними композиційними матеріалами.

Предмет дослідження – математична модель кінетики проходження вологи крізь матеріал.

Методи дослідження

У роботі використано дані експериментальних досліджень кінетики водовбирання для ТКМ. Для математичного моделювання процесу водовбирання були використані методи математичного аналізу. За допомогою обґрунтованих методів математичної фізики були складені та розв'язані кінетичні рівняння, що враховують процес гальмування водовбирання внаслідок часткового поглинання рідини. Рівняння водовбирання зведене до розв'язку Рікатті. Обґрунтованість математичних моделей була підтверджена близьким збігом одержаних теоретичних та експериментальних даних.

Результати та їх обговорення

Виходячи з експериментальних даних (рис. 1), процес водовбирання багат шаровими ТКМ складається з двох етапів:

– I етап – процес проникнення рідини у ТКМ здійснюється без гальмування, рідина «заливається» у полотно (рис.1). Якщо припустити, що процес проходить до якогось $t_{кр}$, то кінетичне рівняння може бути записане у такому вигляді:

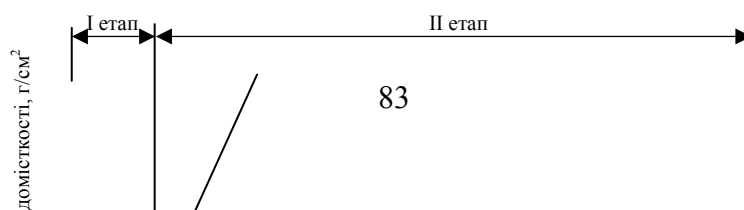
$$\frac{du}{dt} = u_0 - k \quad \text{при } t < t_{кр}, \quad (3)$$

де u_0 – швидкість надходження рідини в одиницю об'єму проби без гальмування; k – константа.

– II етап – процес проникнення рідини в ТКМ супроводжується гальмуванням внаслідок того, що проба ТКМ вже частково поглинула рідину (рис.1). Цей процес починається з $t_{кр}$, і кінетичне рівняння може бути записане у вигляді, подібному тому, що запропоновано авторами [2], а саме:

$$\frac{du}{dt} = u_0 - k_1 u \quad \text{при } t \geq t_{кр}. \quad (4)$$

де u_0 – швидкість проникнення рідини в одиницю об'єму проби без гальмування; $k_1 u$ – швидкість гальмування проникнення рідини в пробу ТМ.



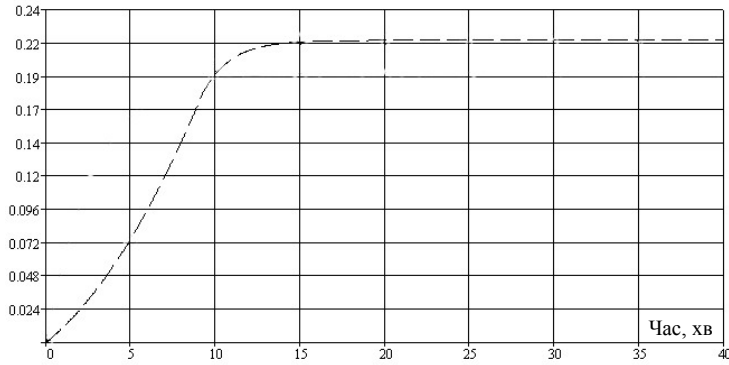


Рис.1. Типова крива кінетики водовбирання багатшаровим ТКМ

Враховуючи все викладене вище кінетичне рівняння процесу водовбирання буде записане у такому вигляді:

$$\frac{du}{dt} = \begin{cases} u_0 - k, & t < t_{кр} \\ u_0 - k_1 u, & t \geq t_{кр} \end{cases} \quad (5)$$

Розв'язуємо спільно одержане рівняння (5). В результаті розв'язання першого рівняння $\frac{du_1}{dt} = u_0 - k$ одержуємо рівняння прямої, яке описує перший етап процесу вбирання рідини ТКМ, а саме:

$$u_1 = (u_0 - k) \cdot t. \quad (6)$$

Розв'язання другого неоднорідного лінійного диференційного рівняння $\frac{du_2}{dt} = u_0 - k_1 u$ визначається як сума рішення однорідного рівняння та частинне рішення неоднорідного рівняння, а саме:

$$u_{2\text{р.неоднор.}} = u_{2\text{р.однорід.}} + u_{2\text{час.р.неоднор.}} \quad (7)$$

Після ряду перетворень однорідне лінійне диференційне рівняння $\frac{du_2}{dt} + k_1 u = 0$ набуває такого вигляду:

$$u_{2\text{р.однорід.}} = c \cdot e^{-k_1 t}. \quad (8)$$

Для розв'язання рівняння (7) загальних способів не існує, але часткове рішення може бути знайдене у вигляді певної постійної величини:

$$u_{2\text{час.р.неоднорід.}} = b = const. \quad (9)$$

Повертаючись до рівняння (4) та враховуючи (9), одержуємо рівняння $-k_1 b + a = 0$. Звідси $b = \frac{a}{k_1}$.

Тоді, зважаючи на рівняння (7), рішенням неоднорідного лінійного диференційного рівняння (4) буде таке:

$$u_{2\text{р.неоднорід.}} = c \cdot e^{-k_1 t} + \frac{a}{k_1}. \quad (10)$$

Умовою збігу кривих кінетики водовбирання ТМ, описаних рівнянням (6) та (10) є умова: u_1 (при $t=t_{кр}$) = u_2 (при $t=t_{кр}$). Після всіх перетворень рівняння (5) набуває такого вигляду:

$$u = \begin{cases} (u_0 - k)t, & t < t_{кр} \\ \frac{(u_0 - k)t_{кр} - \frac{a}{k_1}}{e^{-k_1 t_{кр}}} \cdot e^{-k_1 t} + \frac{a}{k_1}, & t \geq t_{кр} \end{cases} \quad (11)$$

Криві, що виражають кінетику процесу водовбирання, побудовані з використанням одержаного рівняння (11) в області критичного часу, позбавлені плавності, мають різкий перелом та крутий підйом кривої в т.2 (рис. 2). За результатами пошукових досліджень для процесу водовбирання кінетика найбільш повно описується диференціальним рівнянням такого типу:

$$\frac{du}{dt} = \begin{cases} u_0 - k + k_1 t, & t < t_{кр} \\ u_0 - k_2 u - k_3 u^2, & t \geq t_{кр} \end{cases} \quad (12)$$

Розв'яжемо рівняння (12) за тією ж послідовністю, що й рівняння (5). В результаті розв'язання першого рівняння $\frac{du}{dt} = u_0 - k + k_1 t$ одержуємо таке рівняння: $u = (u_0 - k)t + k_1 \frac{t^2}{2} + c$.

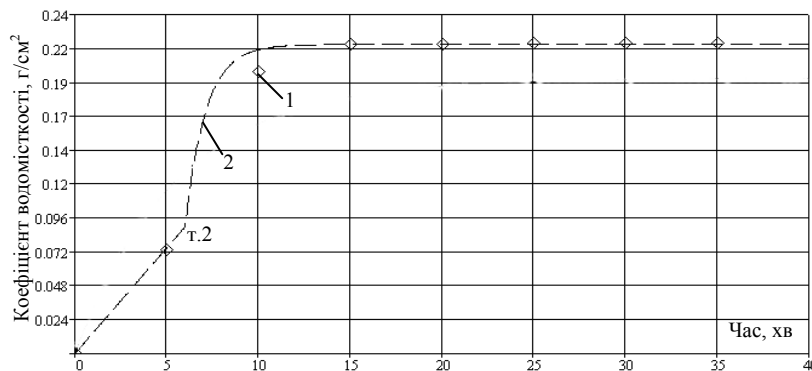


Рис.2. Кінетика водовбирання багат шаровим ТКМ:

1 – експериментальні дані; 2 – запропонована методика, рівняння (11)

Постійну величину c шукаємо з умови, що при $t=0$ концентрація поглинутої пробою рідини дорівнює нулю $u=0$, відповідно $c=0$. Одержуємо рівняння, що описує перший етап процесу вбирання рідини ТКМ, а саме:

$$u = (u_0 - k)t + k_1 \frac{t^2}{2} \quad (13)$$

Розв'яжемо друге нелінійне рівняння (12), яке має вигляд рівняння Рікатті, а саме:

$$\frac{du}{dt} = u_0 - k_2 u - k_3 u^2 \quad (14)$$

Для такого рівняння не існує загальних рішень, але частинне рішення може бути знайдене у вигляді постійної: $u_c = const$, тоді $\frac{du_c}{dt} = 0$. Підставляючи цю константу у рівняння (13), одержуємо таке

квадратне рівняння: $u_0 - k_2 u_c - k_3 u_c^2 = 0$, рішенням якого буде таке:

$$u_c = -\frac{k_2}{2k_3} - \frac{\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_3 u_0}}{k_3} \quad (15)$$

Загальне рішення рівняння будемо шукати при переході від рівняння Рікатті до рівняння Бернуллі, для цього рішення подаємо у такому вигляді:

$$u = z + u_0, \quad (16)$$

де z – нова функція; u_0 – частинне рішення (15). Враховуючи вираз (16), запишемо рівняння Рікатті (14) у такому

вигляді: $\frac{d(z + u_0)}{dt} = u_0 - k_2(z + u_0) - k_3(z + u_0)^2$ та після низки перетворень одержуємо рівняння Бернуллі

$\frac{dz}{dt} = -(k_2 + 2k_3u_0)z - k_3z^2$, для рішення якого робимо наступну заміну: $z = \frac{1}{y}$ та беремо таку похідну:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Одержаний вираз підставляємо в рівняння та одержуємо: $-\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dt} = -k_3 \frac{1}{y^2} - (k_2 + 2k_3u_0) \frac{1}{y}$.

Після скорочення y^2 вираз набуває вигляду: $\frac{dy}{dt} = k_3 + (k_2 + 2k_3u_0)y$. Рішенням такого лінійного рівняння є:

$$y = C_1 e^{k_2 + 2k_3u_0 t} - \frac{k_3}{k_2 + 2k_3u_0}. \quad (17)$$

Переходячи до вихідної змінної, одержуємо: $u = z + u_0 = u_0 + \frac{1}{C_1 e^{(k_2 + 2k_3u_0)t} - \frac{k_3}{k_2 + 2k_3u_0}}$ або

$$u = u_0 + \frac{k_2 + 2k_3u_0}{C_1(k_2 + 2k_3u_0) \cdot e^{(k_2 + 2k_3u_0)t} - k_3}. \quad (18)$$

Константу C_1 знаходимо з умови, що у точці перетину (при $t = t_{kp}$) значення цієї функції буде збігатися зі значенням, знайденим з рівняння (13), тобто

$$(u_0 - k)t_{kp} + k_1 \frac{t_{kp}^2}{2} = u_0 + \frac{k_2 + 2k_3u_0}{C_1(k_2 + 2k_3u_0) \cdot e^{(k_2 + 2k_3u_0)t_{kp}} - k_3}. \quad (19)$$

Звідси константа C_1 дорівнює:

$$C_1 = \frac{k_2 + 2k_3u_0}{(u_0 - k)t_{kp} + k_1 \frac{t_{kp}^2}{2} - u_0} \cdot \frac{1}{(k_2 + 2k_3u_0) e^{(k_2 + 2k_3u_0)t_{kp}} - k_3}. \quad (20)$$

В результаті кінетика процесу водовбирання описується рівняннями:

$$u = \begin{cases} (u_0 - k)t + k_1 \frac{t^2}{2}, & t < t_{kp} \\ u_0 + \frac{k_2 + 2k_3u_0}{C_1(k_2 + 2k_3u_0) \cdot e^{(k_2 + 2k_3u_0)t} - k_3}, & t \geq t_{kp}. \end{cases} \quad (21)$$

У цих рівняннях невідомими ще залишаються константи k , k_1 , k_2 та k_3 , які будемо шукати з таких умов, а саме:

1. У точці перетину при $t = t_{kp}$ похідна від функції (13) дорівнює похідній від функції (18), що означає таке:

$$u_0 - k + k_1 t_{kp} = u_0 - k_2 \left[u_u + \frac{k_2 + 2k_3 u_u}{C_1(k_2 + 2k_3 u_u) \cdot e^{(k_2 + 2k_3 u_u) t_{kp}} - k_3} \right] -$$

$$- k_3 \left[u_u + \frac{k_2 + 2k_3 u_u}{C_1(k_2 + 2k_3 u_u) \cdot e^{(k_2 + 2k_3 u_u) t_{kp}} - k_3} \right]^2 \quad (22)$$

звідки, наприклад можна виразити коефіцієнт k .

2. При досить великому значенні t ($t \rightarrow \infty$) значення функції (18) дорівнює значенню функції, знайденої експериментально (в нашому випадку, наприклад, при $t = 35$ хв). Означимо цю величину u_∞ , при цьому неважко визначити, що це означає таке: $u_u = u_\infty$ або

$$u_\infty = -\frac{k_2}{2k_3} + \frac{\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_3 u_0}}{k_3} \quad (23)$$

3. У точці перетину при $t = t_{kp}$ концентрація рідини досягає свого критичного значення u_{kp} , а саме:

$$(u_0 - k)t_k + k_1 \frac{t_k^2}{2} = u_k \quad (24)$$

4. Перед виходом на встановлений режим (в нашому випадку приблизно між $t_1 = 10$ хв та $t_2 = 15$ хв) там, де експериментальна крива найбільш відрізняється від теоретичної (рис.2), різниця між експериментальними точками дорівнює різниці Δu_{kp} , одержаній з (18), тобто має такий вигляд:

$$\Delta u_{kp} = (k_2 + 2k_3 u_\infty) \cdot \left\{ \left[C_1(k_2 + 2k_3 u_\infty) e^{(k_2 + 2k_3 u_\infty) t_2} - k_3 \right]^{-1} - \left[C_1(k_2 + 2k_3 u_\infty) e^{(k_2 + 2k_3 u_\infty) t_1} - k_3 \right]^{-1} \right\} \quad (25)$$

Розв'язавши спільно рівняння (22), (23), (24) та (25), знайдемо значення коефіцієнтів k , k_1 , k_2 та k_3 . Крива кінетики процесу водовбирання на прикладі одного з варіантів ТКМ зображена на рис.3.

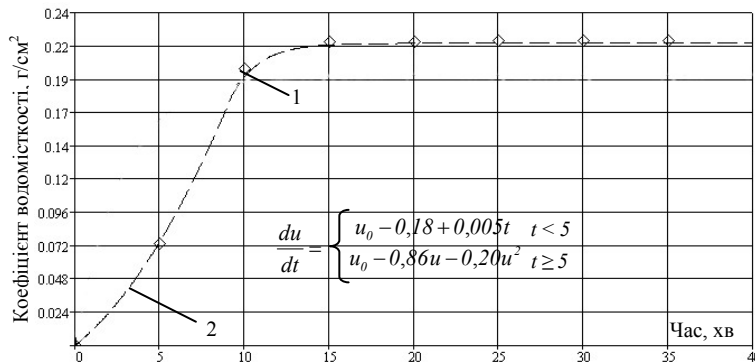


Рис.3. Кінетика водовбирання багат шаровим ТКМ:

1 – експериментальні дані; 2 – запропонована методика, рівняння (12)

Зіставлення експериментальних даних з одержаними кривими, побудованими на основі запропонованого кінетичного аналізу, вказує на високий збіг дослідних та розрахункових величин (похибка дослідю становить $\delta = 2 \div 3\%$).

Висновки

Таким чином, при дослідженні процесу водовбирання багат шаровими ТКМ при їх горизонтальному розміщенні відносно джерела надходження рідини, для опису кінетичних кривих доцільно використовувати

$$\frac{du}{dt} = \begin{cases} u_0 - k + k_1 t, & t < t_{kp} \\ u_0 - k_2 u - k_3 u^2, & t \geq t_{kp} \end{cases}$$

диференційне рівняння, яке враховує двоетапність процесу водовбирання та нелінійну складову цього процесу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Йодкаускас И.А., Жиemiaлис Р.Ф., Пакшвер А.Б. Определение водопоглощаемости текстильных материалов //Текстильная промышленность. – 1986. – №9. – с.63–64.
2. Васильев С.С., Булатов Г.П., Прыгунков М.А. Кинетика процесса влагопоглощения материалами внутренних деталей обуви. Сообщение 2. Вывод уравнения кинетики влагопоглощения //Изв. вузов. Технология легкой пром-сти. – 1977. – №4. – с. 28–31.
3. Yoneda M., Mizuno Y., Yoneda J. Measurment of water absorption perpendicular to fabric plane in two- and multi-layered fabric systems //Textile Res. J. – 1993. – №29 (12). p. 940–949.
4. Ковтун С.І. Кінетика процесу водовбирання багат шаровими текстильними композиційними матеріалами. Повідомлення 1. Особливості кінетики процесу водовбирання //Вісник КНУТД. – 2008. – №5.

Робота виконана за підтримки Міністерства освіти і науки України

Надійшла 16.09.2008

УДК 677.054.023

РОЗРОБЛЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНОГО МЕТОДУ ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕРХНІ НАМОТУВАННЯ

О.С. ЖУК

Чернігівський державний технологічний університет

І.А. ПРОХОРОВА

Херсонський національний технічний університет

У статті представлено геометричний метод дослідження поверхні намотування пакування, який враховує вплив конструктивно-заправних і кінематичних параметрів високошвидкісного процесу намотування. Запропоноване рішення дозволяє прогнозувати форму текстильних пакувань і моделювати технологічний процес намотування нитки на пакування

Незважаючи на те, що проблему формування асортименту форм мотальних пакувань та впливу конструктивно-заправних параметрів на неї вивчали багато спеціалістів-текстильників, досі немає універсального методу дослідження поверхні намотування пакування заданої форми, в якому одночасно було б враховано вплив кінематичних і конструктивних параметрів високошвидкісного процесу намотування, можливість використання вовняної пряжі всіх систем прядіння та праж різноманітного сировинного складу та структури. Тому розробка геометричного методу дослідження поверхні намотування пакування є актуальною на сьогоднішній день.

Об'єкти та методи дослідження