

УДК: 621.923

**Л.М. Березін***Київський національний університет технологій та дизайну***ДО РОЗРАХУНКІВ ГВИНТОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПРУЖИН НА МІЦНІСТЬ ТА СТІЙКІСТЬ**

*Наведено систематизацію та узагальнення традиційних методів розрахунку гвинтових циліндричних пружин на міцність та повздожню стійкість для загального випадку умов навантаження та закріплення пружин. Рекомендовано формули для визначення початкової швидкості навантаження пружини з гарантованою відсутністю ударів витків та формули для обчислення еквівалентних напружень при наявності ударів.*

*Робота супроводжується значним об'ємом нормативного та довідкового матеріалу стосовно об'єкту досліджень.*

*Ключові слова:* гвинтова циліндрична пружина, проектування, розрахунок, міцність, стійкість.

**Л. Н. Березин****К РАСЧЕТАМ ВИНТОВИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН НА ПРОЧНОСТЬ И СТОЙКОСТЬ**

*Приведены систематизация и обобщение традиционных методов расчета винтовых цилиндрических пружин на прочность и продольную устойчивость для общего случая нагружения и закрепления пружин. Рекомендованы формулы для определения начальной скорости нагружения пружины с гарантированным отсутствием ударов витков и формулы для определения эквивалентных напряжений при наличии ударов.*

*Работа сопровождается достаточным объемом нормативного и справочного материала применительно к объекту исследований.*

*Ключевые слова:* винтовая цилиндрическая пружина, проектирование, расчет, прочность, устойчивость.

**L. Berezin****TO THE CALCULATIONS OF CYLINDRICAL SPIRAL SPRINGS ON STRENGTH AND RESILIENCE**

*The systematization and generalization of traditional methods for calculating cylindrical spiral springs for strength and longitudinal resilience for the general case of loading and securing springs are given. Formulas are recommended for determining the initial spring loading speed with a guaranteed absence of coil impacts and formulas for determining equivalent stresses at the availability of impacts. Information provided promotes an integrated approach to design decisions in relation to spring mechanisms and necessary for mathematical support in calculations of springs for reliability according to the criterion of fatigue strength and longitudinal resilience.*

*The work is accompanied by a sufficient amount of normative and reference material in relation to the object of research.*

*Keywords:* helical coil spring, design, calculation, strength, resilience.

**Постановка проблеми.** Гвинтові циліндричні пружини стискання (далі – пружини) відносять до найбільш вживаних пружних елементів в машинобудуванні. Пружини широко застосовують для сприйняття енергії динамічних навантажень та ударів, віброізоляції в машинах, виконання функцій двигуна за рахунок попереднього акумулювання енергії, силового замикання, виміру сил за пружним переміщенням пружини тощо. Працездатність багатьох машин обмежується ресурсом пружин, який зумовлений передусім їх міцністю та стійкістю, а їх втрата може спричинити руйнування або функціональну відмову всієї механічної системи. Таким чином, окрім визначення геометричних параметрів пружин доцільним при проектуванні є перевірка пружин на міцність та стійкість.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Розрахунки пружин на міцність в достатній кількості використовують в пакетах ANSYS10.0, MATHCAD, SolidWorks, Pro-E, CATIA, Autodesk Inventor, в середовищі системи Компас-3D V6 (додаток Компас-spring) та інших. В розрахунках пружин застосовують традиційну перевірку на міцність за нормованим коефіцієнтом запасу міцності або за допустимим напруженням [1], де передусім покладаються на досвід проектувальника. Моделювання пружини методом кінцевих елементів та багато вісний аналіз міцності представлений в [2]. Питання вибору сучасних матеріалів за вимогою забезпечення заданої міцності пружини, таких як Е-скло, епоксидна смола, вуглець представлені в [3, 4.]. Проте слід зазначити обмежені та розрізнені літературні джерела [5, 6] стосовно розрахунків пружин на міцність при наявності ударів між витками, які виникають при значних динамічних навантаженнях пружин та ударах, що призводить до залишкових деформацій та зниженню несучої здатності

пружин. Перевірки на стійкість пружин в переважній більшості не виконують, іноді користуються нормативними документами.

**Постановка завдань.** Метою роботи є систематизацію та узагальнення напрацювань щодо розрахунків гвинтових циліндричних пружин за критерієм міцності та поздовжньої стійкості з подальшою розробкою алгоритму розрахунків для загального випадку умов навантаження та закріплення пружин.

У відповідності до мети задачами дослідження були: аналіз літературних джерел та нормативно-технічних документів стосовно розрахунків пружин на міцність та стійкість; запропонувати формули та послідовність для обчислення напружень в небезпечних точках перерізу витків пружин в найбільш поширених випадках їх навантаження, включно за умовою інерційної взаємодії витків; оцінити прийнятність існуючих розрахунків на стійкість пружин.

**Викладення основного матеріалу.** Пружини стискання в залежності від циклічної втоми поділяють на класи: пружини класу I мають втому не менше  $5 \cdot 10^6$  циклів, класу II –  $10^5$ , класу III – не менше  $2 \cdot 10^3$  циклів. Для пружин класу III допускаються інерційні удари між витками, від яких додатково виникають небажані контактні напруження. У відповідності до нормативних документів при виборі класу пружини стискання виконують перевірку на відсутність ударів між витками від сил інерції за умовою:

$$V_o / V_{kp} \leq 1, \quad (1)$$

де  $V_o$ ,  $V_{kp}$  - початкова швидкість удару вантажу по пружині та критична швидкість пружини.

Критичною швидкістю  $V_{kp}$  називається гранично допустиме значення швидкості переміщення пружини, при якій відсутні динамічні навантаження від ударів між витками пружини, забезпечуються умови міцності та недопущення як локальної, так і загальної втрати стійкості пружиною. Визначається за формулою:

$$V_{kp} = \frac{\tau_3 (1 - F_2 / F_3)}{\sqrt{2G\rho} \cdot 10^{-3}}, \quad (2)$$

де  $\tau_3$  - статичне максимальне дотичне напруження пружини;

$F_2$ ,  $F_3$  - сили пружини при робочій та максимальній деформаціях

$G$  - модуль зсуву матеріалу;

$\rho$  - щільність матеріалу.

Сила пружини при максимальній деформації до дотику витків  $F_3$  зв'язана з силою пружини при робочій деформації залежністю  $F_3 \geq 1,25F_2$ . Для відповідальних пружин доцільно приймати  $F_3 \geq 1,3F_2$ . При розрахунку пружин доцільно використовувати ДСТУ 1452-2007, де наводяться значення сили  $F_3$  та жорсткість одного витка  $c_1$  в залежності від величин  $D$  і  $d$ . При цьому кожному значенню  $d$  відповідає певне прийняте значення напруження  $\tau_3$ .

Підставляючи для марок пружинних сталей відповідні значення  $G = 7,69 \cdot 10^4$  МПа та  $\rho = 7,85 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> маємо спрощений вид:

$$V_{kp} = \tau_3 [1 - (F_2 / F_3)] / (3,58 \cdot 10^7) \quad (3)$$

або, враховуючи статичне дотичне напруження при робочій деформації  $\tau_2 = \tau_3 F_2 / F_3$ ,

$$V_{kp} = \frac{\tau_3 - \tau_2}{35,1}. \quad (4)$$

Для пружин класу I розрахункове напруження та властивості матеріалу дроту пружин регламентуються таким чином, щоб при  $V_o \leq V_{kp}$  та при дії сили попередньої деформації пружини  $F_1$  не менше  $0,2 F_3$  задана втома пружини забезпечувалася при всіх можливих значеннях напружень за умови  $\tau_3 - \tau_2$  і  $\tau_2 - \tau_1$ , що відповідає дотичним напруженням при попередній деформації. Пружини класу II при аналогічних умовах можуть бути як в умовах необмеженої, так і обмеженої втоми. Спільним для пружин класів I та II є відсутність інерційного удару між витками.

Однак нерівність (1) не дає однозначну інформацію про наявність ударів між витками: якщо швидкість навантаження перевищує  $V_{kp}$ , то це не означає, що мають місце удари витків, в іншому випадку відсутність ударів гарантовано.

В [7] на основі енергетичної теорії пропонується визначення допустимої швидкості ударів витків для різних деформацій в зоні контакту за умовою міцності  $\sigma_{max} \leq [\sigma]$ :

- при пружних деформаціях

$$V_{kp} \leq 34,5d \left( \frac{[\sigma]}{E} \right)^2 \sqrt{\frac{D(n-1)}{m_{np}}}; \quad (5)$$

- при пластичних деформаціях

$$V_{kp} \leq \frac{4,34d}{p} \sqrt{\frac{(n-1)D[\sigma]}{p \cdot m_{np}}}, \quad (6)$$

де  $D, d$  - середній діаметр пружини та діаметр дроту витка;

$m_{np} = m_1 + 0,33m_2$  - приведена маса вантажу  $m_1$  та пружини  $m_2$  (прибавка 1/3 маси пружини до маси вантажу впливає з точного рішення динамічної задачі про кінематичне збурення пружної системи з однією степеню свободи та рівномірно розподіленої маси [8]);

$[\sigma]$  - допустиме напруження в зоні контакту;

$E$  - модуль пружності I роду матеріалу;

$n$  - число робочих витків пружини;

$p = d/b$ , де  $b$  - допустима ширина площадки контакту (пластичного відтиску) витків пружини (знаходиться в межах  $p = 10 \dots 100$ ).

Недоліком даного підходу є нехтування енергії, яка поглинається пружиною від вільного її стану з урахуванням початкового підтискання витків до дотику витків. Цей недолік усувається при сумісному використанні хвильової теорії удару стосовно пружини та теорії інерційних ударів витків. Тоді для визначення критичної швидкості пружини маємо [6]:

- за умовою повздовжньої стійкості пружин при умові взаємодії витків

$$V_{kp1} = \frac{f\tau_2 + m_{ep}Gtg\alpha / i - \tau_2}{35,1}; \quad (7)$$

- за умовою міцності пружини

$$V_{kp2} = \frac{f\tau_2 + [\tau] - \tau_2}{35,1}, \quad (8)$$

де  $m_{ep}$  - гранична ступінь стискання пружини, яка визначається з рівняння повздовжньої стійкості або за табл. 2 [6] (знаходиться в межах  $1 < m_{ep} < 1,6$ );

$\alpha$  - кут підйому витків пружини у вільному стані (зміна кута підйому витків підпадає умові  $\alpha \leq 9^\circ$ , проте збільшення  $\alpha$  до  $12^\circ \dots 15^\circ$  при наявності ударів витків дозволяє розмивати фронт хвилі деформації, що компенсує нерівномірність напруженого стану по довжині пружини. Подальше збільшення  $\alpha$  призводить до значного осадку пружини);

$i = \frac{D}{d}$  - індекс пружини;

$f = \left( \eta \left( \frac{m_1}{m_2} + 0,33 \right) \right)^{-0,5}$  - коефіцієнт, який враховується, коли кінетична енергія вантажу

гаситься пружиною; при кінематичному навантаженні та за наявності обмежувача руху вантажу – приймати  $f = 1$ );

$\eta = 0,9 \dots 0,95$  – ККД, який враховує втрату енергії при русі вантажу за напрямними;

$[\tau]$  - допустиме дотичне напруження матеріалу пружини (інформація до розрахунку наведена [9]).

У відповідності до цієї теорії максимальні динамічні дотичні напруження, що виникають в небезпечній точці витку (на внутрішній стороні витка), визначаються за формулою:

$$\tau_{I \max} = (\tau_1 + \tau_2) K_w, \quad (9)$$

де  $\tau_1$  - максимальне статичне дотичне напруження (інформація до розрахунку наведена в [10]);

$\tau_2$  - додаткове динамічне дотичне напруження від проходження хвилі деформації, яке визначається за формулою [11]:

$$\tau_2 = 35,1V_o, \quad (10)$$

$$K_w = \frac{4i-1}{4i-4} + \frac{0,615}{i} - \text{коефіцієнт Вааля, який враховує вплив кривизни витка пружини.}$$

У випадках початкового підтискання пружини необхідно враховувати попередню деформацію  $s_1$ .

За гіпотезою найбільших дотичних напружень (III теорія міцності) маємо відповідні еквівалентні напруження  $\sigma_{еквI} = 2\tau_{I \max} \leq [\sigma]$ .

В розрахунках пружин відповідального призначення рекомендується вводити коефіцієнт, який враховує нерівномірність напруженого стану по довжині пружини та викривлення її геометричної осі  $K_\gamma = 1,1 \dots 1,3$ .

Пружини класу III при всіх співвідношеннях  $V_o$  та  $V_{kp}$  і відносному інерційному зазорі пружини  $\delta$  не більше 0,4 розраховують на гранично високі дотичні напруження кручення та додаткові контактні напруження від інерційного удару витків при гальмуванні вантажу. Подальший стиск пружини призводить до збільшення дотичних та відповідно еквівалентних напружень:

$$\tau_{II \max} = \left( \tau_1' K_D + \tau_2 \right) K_w \quad (11)$$

та  $\sigma_{еквII} = 2\tau_{II \max}$ ,

де  $\tau_1'$  - максимальні статичні дотичні напруження в момент удару між витками;

$K_D$  - коефіцієнт динамічності, який враховує розмив хвилі фронту та запізнення початку контактних деформацій за рахунок виникнення тиску між витками ( $K_D = 1,1 \dots 1,3$ ).

Еквівалентні напруження в зоні контакту витків визначаються за формулою [6]:

$$\sigma = \left( 4\tau_{II \max}^2 K_w^{-2} + 1158^2 (V_1 K_F^{-1} - V_2) \right)^{0,5}. \quad (12)$$

де  $V_1, V_2$  - швидкості, які необхідні для стискання пружини до початку інерційного руху та від початку інерційного руху до дотику витків;

$K_F$  - коефіцієнт, який враховує зниження контактних напружень внаслідок ефекту формування тиску між витками.

Для покращення характеристик міцності пружин застосовують заневолування – попереднє пластичне деформування пружин, яке дозволяє отримати в поперечних перерізах витків поле залишкових напружень, що знижують робочі напруження та вирівнюють розподіл напружень по перерізу. Пружини, які використовують в умовах тривалої дії змінних навантажень не заневолують, оскільки опір втоми заневолуваних пружин не підвищується.

В розрахунках міцності ефект заневолування пружин враховується номінальними напруженнями виду:

$$\tau_{зан} = \frac{16FD}{\pi d^4} \rho, \quad (13)$$

де  $\rho$  - поточний радіус в поперечному перерізі витка ( в небезпечному перерізі  $\rho = d/2$  ).

Обчислене значення  $\tau_{зан}$  необхідно вводити в формули (9) та (11).

Явище втрати повздовжньої стійкості пружин, які використовують без напрямних (стержнів – при внутрішньому центруванні або стаканів – при зовнішньому центруванні) полягає в боковому випинанні пружин від початкової прямолінійної геометричної осі, що відбувається на проміжній стадії їх стискання. Рекомендовано в [8], що для забезпечення стійкості пружин при стисканні відношення повинно відповідати умовам:

$$\left(\frac{l_o}{D}\right)_{kp} \leq 1,75 - \text{при шарнірному закріпленні опорних витків};$$

$$\left(\frac{l_o}{D}\right)_{kp} \leq 3,5 - \text{при жорсткому закріпленні опорних витків}.$$

Критичний коефіцієнт повздовжньої стійкості пружини визначається за формулою:

$$\left(\frac{l_o}{D}\right)_{kp} = \sqrt{\beta \frac{2 - \frac{1}{1+\mu}}{1 + \frac{1}{1+\mu}}}, \quad (14)$$

де  $\beta$  - коефіцієнт, який враховує характер закріплення опорних витків пружини (значення  $\beta$  при різних закріпленнях витків – дивись табл.1 [12]);

$\mu$  - коефіцієнт Пуасона.

З достатньою для інженерних розрахунків точністю граничні значення  $(l_o/D)_{kp}$  в залежності від кутів навивки (в межах  $4^\circ \dots 8^\circ$ ), числа витків (в межах 7...20) та особливостей деформування наведені в [13].

Пружин, які мають  $(l_o/D)_{kp} > 5$  та після осаду їх до дотику витків, відновлюють свою початкову форму, необхідно додатково перевіряти на динамічну стійкість за допустимим навантаженням:

$$\frac{F_{kp}}{n_c} \leq [F], \quad (15)$$

де  $F_{kp}$  - критична сила для пружин стискання, при якій втрачається прямолінійна форма рівноваги (перевищення її призводить до бокового випинання і в подальшому до втрати стійкості пружини):

$$F_{kp} = \frac{4GJ}{n^2 D^2}, \quad (16)$$

де  $J = \frac{\pi d^4}{64}$  - осьовий момент інерції дроту пружини;

$n_c$  - коефіцієнт запасу повздовжньої динамічної стійкості:  $n_c = \frac{1}{s}$  при  $s \geq 0,5$  та  $n_c = 2,5$  при  $s < 0,5$ ,

де  $s$  - відносне осьове зближення торців пружини при закінченні навантаженням критичною силою  $F_{kp}$ . Величина  $s$  встановлюється в залежності від заданої відносної ступені стискання пружини  $m = s/l_o$ .

**Висновки.** Наведено систематизацію та узагальнення традиційних методів розрахунку гвинтових циліндричних пружин на міцність та повздовжню стійкість для загального випадку умов навантаження (без ударної і ударної взаємодії витків) та закріплення пружин. Рекомендовано формули для визначення початкової швидкості навантаження пружини з гарантованою відсутністю ударів витків та формули для обчислення еквівалентних напружень при наявності ударів витків пружини. Представлена інформація сприяє комплексному підходу до проектних рішень стосовно пружинних механізмів та необхідна для математичної підтримки в розрахунках пружин на надійність за критеріями втомленої міцності та повздовжньої стійкості.

#### Список використаних джерел:

1. Aimin Y., Changjin Y. Formulation and evaluation of analytical studies for cylindrical helical spring. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2010. Vol. 23, № 1. P. 85–94.
2. Dammak F. Finite element method for the stress analysis of isotropic cylindrical helical spring. *European Journal of Mechanics A Solids*. 2005. Vol. 24, № 6. P. 1068–1078.

3. Kaiser B., Pyttel B., Berger C. Behavior of helical compression springs made of different materials. *International journal of fatigue*. 2011. Vol. 33, № 1. P. 23–32.
4. Das A., Kumar A. Selection of Spring Material Using Promethee Method. *Journal of Mechanical and Civil Engineering*. 2015. Vol. 12, № 5. P. 82–91.
5. Полищук Д. Ф. Обзор работ по основным задачам статики и динамики цилиндрических пружин. Аналитический обзор за 1934-1977 гг. № 2344. М: ЦНИИ информации и технико-экономических исследований, 1980. 51с.
6. Полищук Д. Ф. Обобщенная теория цилиндрических пружин. Ижевск: Изд-во Удмуртского государственного университета, 1992. 216 с.
7. Стихановский Б. Н. Определение допустимых скоростей удара витков цилиндрической пружины сжатия. *Омский научный вестник*. Омск, 2006. №4 (33). С.118-119.
8. ДСТУ ГОСТ 1452:2007. Пружини циліндричні гвинтові візків та ударно-тягових приладів рухомого складу залізниць. Технічні умови (ГОСТ 1452-2003, ІДТ). [Чинний від 2007-10-01]. Вид. офіц. Київ: Держспоживстандарт України, 2007. 14 с.
9. Березін Л. М., Рубанка М. М. До розрахунку деталей на міцність в ймовірнісному аспекті. *Вісник Київського національного університету технологій та дизайну*. Київ, 2018. №4 (124). С.17-25.
10. Березін Л. М., Рубанка М.М. Розрахунки деталей на надійність та довговічність за критерієм втомленісної міцності. *Вісник Київського національного університету технологій та дизайну*. Київ, 2018. №5(125). С. 56-62.
11. Остроумов В. П., Карпунин В.А. Повышение динамической прочности пружин. М.: Машгиз, 1961. 245 с.
12. Гусев А. В., Орлова А. М., Рудакова Е. А. Анализ методов расчета винтовых цилиндрических пружин на устойчивость при сжатии. *Proceedings of Petersburg Transport University*. Санкт-Петербург. 2015. №4. С. 108-116.
13. Яхин С. М., Зиганшин Б. Г., Шамсутдинов Ф. А. Методика проектирования и расчета пружин сельскохозяйственных машин по критерию динамической устойчивости. *Нива Поволжья*. Пенза. 2012. №3 (24). С.41-44.

**Рецензенти:**

**Зенкін Микола Анатолійович**, професор кафедри Комп'ютерно-інтегрованих технологій та виміральної техніки Київського національного університету технологій та дизайну, доктор технічних наук, професор

**Щербань Юрій Юрійович**, професор, завідувач кафедрою Київського коледжу легкої промисловості, доктор технічних наук, академік міжнародної академії інформатизації.

Стаття надійшла до редакції 23.08.2019